Matematica C3 – Geometria Razionale

Manuale di geometria per il biennio della scuola secondaria di secondo grado

Coordinatori del progetto

Antonio Bernardo, Anna Cristina Mocchetti, Angela D'Amato, Claudio Carboncini

Autori

Angela D'Amato, Cristina Mocchetti, Gemma Fiorito, Antonio Bernardo, Lucia Rapella

Hanno collaborato

Francesco Camia, Paolo Baggiani, Eugenio Medaglia, Erasmo Modica, Vittorio Patriarca, Laura Todisco, Germano Pettarin, Giuseppe Pipino, Alberto Brudaglio, Nicola Chiriano, Anna Battaglini-Frank, Luca Frangella, Luciano Sarra, Dorotea Jacona, Alessandro Paolini

Gli esercizi che nel testo sono contrassegnati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 2.1 del 04.04.2012

Stampa

Seconda edizione, settembre 2012

Dati tecnici per l'adozione del libro a scuola:

Titolo: Matematica C3, Geometria razionale
Codice ISBN: 9788896354254
Editore: Matematicamente.it
Anno di edizione: 2012
Prezzo: 0,00
Formato: ebook (PDF + ODT)

Prefazione

Guardando i libri di testo sia con gli occhi dell'insegnante che li usa, sia dell'autore che li scrive, ci si rende conto di un fatto banale: chi scrive i manuali scolastici sono gli insegnanti, chi li usa sono sempre gli insegnanti. Dal momento che oggi ci sono gli strumenti, sia quelli elettronici, sia il sistema della stampa su richiesta, che permettono di "circuitare" direttamente autori e fruitori, mi sono deciso a intraprendere la creazione di un manuale di matematica “libero”, nel senso più ampio che oggi, nell'era delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione, si usa dare a questo termine. Tuttavia, adottare “ufficialmente” un testo scolastico nella scuola italiana è un fatto semplice solo se si segue un percorso consolidato nel tempo, fatto più che altro di prassi e abitudini che non di leggi specifiche. Per rispondere a queste esigenze questo Manuale è fatto di Autori, Contenuti, Supporti e Dati legali.

Obiettivi. Il progetto "Matematica C^3" ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipologia di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza Creative Commons. Si propone, quindi, di abbattere i costi dell'istruzione, ridurre il peso dei libri, invogliare gli studenti che non avrebbero comprato un libro ad usarlo almeno in forma gratuita, promuovere l'autoformazione per chi è fuori dai percorsi scolastici. Ha inoltre l'ambizione di avviare una sfida "culturale" più ampia di una scuola più democratica, più libera, dove ognuno possa accedere gratuitamente almeno alle risorse di base.

Autori. Il manuale è scritto in forma collaborativa da diverse decine di docenti di matematica sulla base della loro esperienza reale di insegnamento nelle diverse scuole. Alla sua realizzazione hanno contribuito anche studenti e appassionati. Tutti hanno contribuito in maniera gratuita e libera.

Contenuti. Matematica C3 si presenta come un *work in progress* sempre aggiornato e migliorabile da parte di tutti, docenti e studenti. Può essere liberamente personalizzato da ciascun insegnante per adeguarlo alla scuola in cui insegna, al proprio modo di lavorare, alle esigenze dei suoi studenti. È pensato non tanto per lo studio della teoria, che resta principalmente un compito dell'insegnante, quanto per fornire un'ampia scelta di esercizi da cui attingere per “praticare” la matematica. Lo stile scelto è quello di raccontare la matematica allo stesso modo in cui l'insegnante la racconta in classe di fronte agli studenti. Gli argomenti sono trattati secondo un approccio laboratoriale, senza distinguere eccessivamente tra teoria ed esercizi; teoria, esempi svolti, esercizi guidati, esercizi da svolgere vengono presentati come un tutt’uno.

Supporti. Matematica C3 è scaricabile dal sito www.matematicamente.it. È disponile in formato elettronico pdf completamente gratuito; è disponibile anche nella versione per software liberi e gratuiti come OpenOffice o LibreOffice; è in lavorazione una versione in LaTeX. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono, in nessun caso ci sono diritti d’autore da pagare agli autori o all’editore. Il docente che vorrà sperimentare nuove forme d'uso può usarlo in formato elettronico su tablet pc, netbook o pc portatili, può proiettarlo sulla lavagna interattiva (LIM) interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni, formule ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presi da siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori. A casa lo studente potrà usare il libro sullo stesso dispositivo che ha usato in classe (tablet pc, netbook, notebook) con le annotazioni e le modifiche fatte dall'insegnante, potrà svolgere gli esercizi direttamente nel formato aperto di LibreOffice o OpenOffice, potrà studiare in forma collaborativa con i suoi compagni attraverso i social network (Facebook) o i sistemi di instant messaging (Skype) particolarmente diffusi tra i ragazzi.

L’approccio di Matematica C3 è coerente con quanto sollecitato dallo stesso Ministero della Pubblica Istruzione. La circolare n.18 del 09.02.2012 afferma: “Le adozioni da effettuare nel corrente anno scolastico, a valere per il 2012/2013, presentano una novità di assoluto rilievo, in quanto, come è noto, i libri di testo devono essere redatti in forma mista (parte cartacea e parte in formato digitale) ovvero debbono essere interamente scaricabili da internet. Pertanto, per l’anno scolastico 2012/2013 non possono più essere adottati né mantenuti in adozione testi scolastici esclusivamente cartacei.”

Dati tecnici per l'adozione del libro a scuola: Titolo: Matematica C3, Geometria razionale - Codice ISBN: 9788896354254 - Editore: Matematicamente.it - Anno di edizione: 2012 - Prezzo: €0,00 (zero) - Formato: ebook (PDF + ODT).

Il coordinatore del progetto
prof. Antonio Bernardo

INDICE

CAPITOLO 1: NOZIONI FONDAMENTALI

CAPITOLO 2: CONGRUENZA NEI TRIANGOLI

CAPITOLO 3: RETTE PARALLELE

CAPITOLO 4: QUADRILATERI

CAPITOLO 5: CIRCONFERENZA

CAPITOLO 6: PROPORZIONALITÀ

CAPITOLO 7: SIMILITUDINE

CAPITOLO 8: EQUIESTENSIONE E AREE

CAPITOLO 9: TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

MATEMATICA C3 - GEOMETRIA
1. NOZIONI FONDAMENTALI

Geometry lesson Photo by: kevindooley
Taken from: http://www.flickr.com/photos/pagedooley/2575606606/

Indice

►1. Introduzione alla geometria razionale

Breve nota storica

La parola geometria deriva dal greco antico: γεωμετρία, composta da γεω (geo) che significa "terra" e da μετρία (metria) che significa "misura",che tradotto alla lettera significa "misura della terra". Secondo una tradizione storica, durante il VI secolo a.C. alcuni matematici e pensatori greci (principalmente Talete e Pitagora) cominciarono a organizzare in maniera razionale (secondo il susseguirsi di ragionamenti logici) le conoscenze geometriche che egiziani e babilonesi avevano raggiunto nei secoli precedenti. Lo storico greco Erodoto, vissuto tra il 484 a.C. e il 425 a.C., racconta che a causa delle periodiche inondazioni del fiume Nilo gli egiziani erano costretti a ricostruire ogni anno i confini dei singoli possedimenti terrieri e in questo modo avevano sviluppato delle modalità tecniche per la misura della terra (γεωμετρία appunto). Ritrovamenti più recenti di tavolette di creta del periodo babilonese incise con caratteri cuneiformi ci fanno ritenere che la cultura babilonese possedesse già delle sofisticate conoscenze geometriche. Di certo sappiamo che nel III secolo a.C. il matematico ellenico Euclide, direttore della grande biblioteca di Alessandria in Egitto, diede una struttura razionale alle conoscenze geometriche note sino ad allora scrivendo una delle più grandi opere della cultura occidentale, gli "Elementi" (in greco Στοιχεῖα). Questa grande opera è organizzata in 13 libri, di cui i primi sei riguardano la Geometria Piana, i successivi quattro trattano i rapporti tra grandezze e gli ultimi tre riguardano la Geometria Solida. Essa prese il posto di tutti i libri precedenti sulla geometria e servì come testo fondamentale nell'antichità e nel medioevo; è stata usata come libro scolastico di geometria fino ai nostri giorni. La sua considerazione presso i Romani fu modesta, ma fu grandissima presso i Bizantini e gli Arabi. Proprio questi ultimi la reintrodussero in Europa dopo la perdita medievale, grazie alla traduzione di Abelardo di Bath (secolo XII).
Dal punto di vista della struttura logica, gli *Elementi* di Euclide sono organizzati a partire da cinque assiomi (nozioni comuni evidenti), cinque postulati (proposizioni che si richiede siano assunte come vere, senza dimostrazione) specifici della geometria e 23 definizioni. L'opera di Euclide è rimasta nella nostra cultura l'unico punto di riferimento per lo studio della geometria, fino a quando, contestualmente allo studio dei fondamenti delle altre branche della matematica, i matematici cercarono di dare un base più rigorosa alla geometria di Euclide. Una impostazione assiomatica più moderna venne data dal matematico tedesco David Hilbert nel libro *Grundlagen der Geometrie* pubblicato nel 1899, nel quale la geometria veniva fondata su ben 21 assiomi.

Lo spazio fisico e la geometria

La geometria nasce come studio sistematico dello spazio fisico e delle forme che in esso si muovono. Lo spazio in cui ci muoviamo è per tutti una delle prime esperienze che facciamo a partire fin dai primi mesi di vita. I nostri sensi determinano le sensazioni che ci permettono di riconoscere le forme degli oggetti e i loro movimenti. Tuttavia le nozioni geometriche come quelle di punto, retta, rettangolo, cubo, sfera... non trovano un perfetto riscontro nella realtà fisica. Nello spazio fisico non esistono, infatti, punti e rette come li descrive la geometria, né figure a due sole dimensioni, né cubi o sfere perfette. La geometria si propone quindi di fornire un 'modello' ideale della realtà fisica per ciò che riguarda le forme degli oggetti e le proprietà dello spazio in cui sono immersi.
Fino alla seconda metà dell'Ottocento, matematici e filosofi sono stati sostanzialmente d'accordo nel considerare la geometria come la scienza che descriveva razionalmente le proprietà dello spazio fisico. Galileo ne *Il saggiatore* (1623) scriveva:

> *"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto."*

A partire dalla seconda metà del XIX secolo i matematici si sono invece convinti che la geometria non descrive esattamente lo spazio fisico, che sono possibili più geometrie ugualmente vere dal punto di vista logico e matematico. Lo studio matematico della geometria si è allora differenziato dallo studio dello spazio fisico, e da quello dello spazio psicologico percepito dall'uomo con i suoi sensi. I matematici hanno accettato l'esistenza di diverse geometrie matematicamente possibili, si sono accontentati di costruire dei modelli astratti e hanno lasciato ai fisici la 'scelta' del modello che meglio si adatta a descrivere i fenomeni fisici dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande. La geometria allora è diventata una branca della matematica alla quale i matematici hanno cercato di dare un fondamento esclusivamente logico, indipendente dalle esperienze fisiche.

Il legame tra fisica e matematica non si è però mai rotto. Con il passare dei secoli, ci si è resi sempre più conto di quanto la "geometria" del mondo sia molto più complessa di quanto sembrasse e di come alcune nuove geometrie riescono a descrivere meglio fenomeni che con la vecchia geometria di Euclide non si riusciva a spiegare.

►2. Il metodo assiomatico, i concetti primitivi e le definizioni

La geometria, sin dai tempi di Euclide, è stata organizzata assiomaticamente, partendo cioè dalla fondamenta. Nella matematica queste fondamenta sono costituite dai concetti primitivi e dagli assiomi. Gli **enti primitivi** sono le nozioni che si decide di non definire. Ci si può rendere facilmente conto, infatti, che non tutto può essere definito, poiché in ogni nozione che si definisce si deve fare ricorso ad altre nozioni, le quali a loro volta devono essere definite per mezzo di altre nozioni e così via all'indietro senza che teoricamente questo processo abbia mai una fine, arrivando necessariamente ad alcune nozioni così primitive da non poter essere definite con altre nozioni più elementari. A queste nozioni non è né necessario né possibile associare alcun significato esplicito, è invece fondamentale esprimere le loro proprietà esclusivamente attraverso **assiomi**, cioè attraverso proprietà non dimostrabili che indicano però come gli enti primitivi devono e possono essere usati. Il matematico Hilbert utilizza tre enti primitivi - punto, linea e piano - e 21 assiomi. A partire dagli enti primitivi si danno e fanno derivare tutte le **definizioni** degli enti geometrici.

Nozioni di logica

Assumiamo come "primitivo" il concetto base di *proposizione* (o "giudizio" secondo la terminologia del grande filosofo greco Aristotele): chiamiamo **proposizione** una frase (affermativa o negativa) a cui abbia senso associare un valore di verità (**V**, vero, oppure **F**, falso).
Per esempio, sono proposizioni logiche affermazioni del tipo "Una retta ha infiniti punti", "2+3=10". Non sono proposizioni logiche le frasi "1000 è un numero grande", "il quadrato è semplice". La prima frase esprime un'affermazione vera, la seconda un'affermazione falsa, la terza e la quarta esprimono affermazioni non valutabili oggettivamente, di queste ultime non si può dire se sono vere o false.

1 Quali delle seguenti frasi sono proposizioni logiche?

[A].	I matematici sono intelligenti	Sì	No
[B].	12 è un numero dispari	Sì	No
[C].	Pascoli è stato un grande poeta	Sì	No
[D].	Pascoli ha scritto La Divina Commedia	Sì	No
[E].	Pascoli ha scritto poesie	Sì	No
[F].	Lucia è una bella ragazza	Sì	No
[G].	Lucia ha preso 8 al compito di matematica	Sì	No

Bisogna tenere conto che una proposizione può essere logica in un sistema e non esserlo in un altro. La possibilità di determinare la verità di una proposizione dipende infatti dalle modalità attraverso cui si può arrivare a determinarne la verità. Per esempio la proposizione "Questo bullone è grande" in generale non è una proposizione logica ma se sappiamo che il metro di riferimento è un determinato dado allora acquisisce una valore logico perché si può stabilire se quel bullone è troppo grande o no. Quindi in generale potremmo dire che una proposizione è *decidibile* se nel sistema di riferimento esiste un modo per determinarne la veridicità.
La logica delle proposizioni si fonda sui seguenti tre principi della logica aristotelica:

- Il *principio di identità*: ogni oggetto è identico a se stesso e a nessun altro oggetto;
- Il *principio di non contraddizione*: una stessa proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa;
- Il *principio del terzo escluso* ("*tertium non datur*"): una proposizione può essere solo vera o falsa, non può assumere un diverso valore di verità.

Il corpo della geometria, come di qualunque altra teoria matematica, è costituito da **proposizioni**, cioè da affermazioni che riguardano gli enti geometrici e che sono vere o false.
Le proposizioni possono essere semplici affermazioni (**proposizioni atomiche**) oppure possono essere ottenute da una o più proposizioni elementari legate tra di loro attraverso connettivi logici (elementi linguistici del tipo "non", "e", "oppure", "o … o", "quindi", "se … allora", "se e solo se"). In questo caso si parla di **proposizioni composte** o molecolari
Per esempio, la proposizione "un triangolo ha tre lati e ha tre angoli" è composta dalle proposizioni "un triangolo ha tre lati" e "un triangolo ha tre angoli" unite dal connettivo "e".

La **congiunzione** di due proposizioni si ottiene con il connettivo "e" (**et**, **and**, $\wedge$): la proposizione r ottenuta dalla **congiunzione** delle proposizioni p e q, in simboli si usa scrivere $r = p \wedge q$, è vera se entrambe le proposizioni p e q sono contestualmente vere, è falsa quando anche una sola delle due proposizioni è falsa.

p	q	$r = p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Per esempio, "Ho avuto 7 in italiano e matematica" è un'affermazione vera solo quando ho avuto 7 in entrambe le materie.

Per esprimere tutte le possibilità in maniera sintetica si usa una tabella a doppia entrata, detta tavola di verità.

La **disgiunzione** (**inclusiva**) di due proposizioni si ottiene con il connettivo "o" (**vel**, **or**, $\vee$): la proposizione s ottenuta dalla disgiunzione di due proposizioni p e q, in simboli $s = p \vee q$, è vera quando almeno una delle due proposizioni è vera, è falsa solo se entrambe le proposizioni sono false.

p	q	$s = p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La **disgiunzione esclusiva** di due proposizioni si ottiene con il connettivo [o congiunzione] "o … o" (**aut**, **xor**, $\dot{\vee}$): la proposizione t ottenuta dalla disgiunzione esclusiva di due proposizioni p e q, in simboli $t = p \dot{\vee} q$, è vera quando solo una delle due proposizioni è vera, è falsa quando le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false.

p	q	$t = p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Per esempio, nell'affermazione "Oggi il Milan vince o pareggia" la congiunzione "o" ha valore esclusivo.

Esempio

p="un triangolo ha tre lati" (Vera) q="un triangolo ha tre vertici" (Vera)

r="un triangolo ha quattro angoli" (Falsa) s="un triangolo ha tre dimensioni" (Falsa)

Allora $p \wedge q$ è vera, $q \wedge r$ è falsa, $r \wedge s$ è falsa.

Inoltre $p \vee q$ è vera, $q \vee r$ è vera, $r \vee s$ è falsa.

Invece $p \dot{\vee} q$ è falsa, $q \dot{\vee} r$ è vera, $r \dot{\vee} s$ è falsa.

La **negazione** (connettivo "non", simboli **non**, **not**, $\neg$) è un operatore che, a differenza dei precedenti, non lega più proposizioni ma agisce su un'unica proposizione (per questo si dice che è un operatore unario, in analogia all'operazione insiemistica di complementazione). La negazione di una proposizione p è una proposizione che si indica con il simbolo $\neg p$ che è vera se p è falsa, viceversa è falsa se p è vera.

La *doppia negazione* equivale ad un'affermazione, cioè $\neg(\neg p)$ è equivalente a p.

La tavola di verità è la seguente:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Esempio

- In riferimento agli esempi precedenti, ¬p e ¬q sono false, mentre ¬r e ¬s sono vere.

È piuttosto semplice capire il meccanismo della negazione se applicata a proposizioni atomiche, spesso è meno intuitivo il valore di verità della negazione di una proposizione più complessa.

Ad esempio, la negazione $p \wedge q$ di non è $\neg p \wedge \neg q$ bensì $\neg p \vee \neg q$, mentre la negazione di $p \vee q$ è $\neg p \wedge \neg q$ e non $\neg p \vee \neg q$.

In formule: $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$ e $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.

Per esempio, "Non è vero che Marco e Luca sono stati bocciati" può voler dire che entrambi non sono stati bocciati o solo uno di loro non è stato bocciato.

Queste uguaglianze prendono il nome di leggi di De Morgan.

La verifica si può vedere dalla seguente tavola di verità:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V	F	V

Come per le operazioni aritmetiche anche per gli operatori logici è possibile analizzarne le proprietà. Ne indichiamo qualcuna a titolo di esempio:

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ proprietà associativa della congiunzione

$p \wedge q \equiv q \wedge p$ proprietà commutativa della congiunzione

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione

2 A partire dalle due proposizioni:
p = ”16 è divisibile per 2” q = “16 è divisibile per 4”
costruisci le proposizioni

$p \vee q =$

$p \wedge q =$

3 A partire dalle proposizioni: p=”18 è divisibile per 3” q=”18 è numero dispari”
costruisci le proposizioni di seguito indicate e stabilisci il loro valore di verità

a) $p \vee q$ V F b) $p \wedge q$ V F c) $\neg p$ V F
d) $\neg q$ V F e) $p \vee \neg q$ V F f) $\neg p \wedge q$ V F
g) $p \wedge \neg q$ V F h) $\neg p \vee \neg q$ V F i) $\neg p \wedge \neg q$ V F

4 In quale delle seguenti proposizioni si deve usare la **o** inclusiva e in quali la **o** esclusiva:

a. Nelle fermate a richiesta l’autobus si ferma se qualche persona deve scendere o salire.
b. Luca sposerà Maria o Claudia.
c. Fammi chiamare da Laura o da Elisa.
d. Si raggiunge l’unanimità quando sono tutti favorevoli o tutti contrari.

La disgiunzione esclusiva $\dot{\vee}$ a volte non viene messa tra gli operatori logici fondamentali perché è esprimibile attraverso gli altri tre altri operatori presentati finora.

5 Verificare che date due proposizioni p e q, la proposizione composta $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ è equivalente alla proposizione $p \dot{\vee} q$. Dimostrare poi l’equivalenza usando le tavole della verità.

6 A partire dalla preposizioni: p = ”Oggi pioverà” $\neg p$ = ”Oggi non pioverà”
scrivere le preposizioni $p \dot{\vee} \neg p$, $p \vee \neg p$, $p \wedge \neg p$. Scrivere quindi la loro tabella della verità.

7 Scrivere le tabelle di verità delle formule

a) $p \wedge (p \vee q)$ b) $p \vee (p \wedge q)$ c) $p \dot{\vee} (p \wedge q)$
d) $p \wedge (p \dot{\vee} q)$ e) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ f) $(p \vee q) \wedge r$

8 Qual è la negazione della frase “Ogni volta che ho preso l’ombrello non è piovuto”?

[A] Almeno una volta sono uscito con l’ombrello ed è piovuto
[B] Quando esco senza ombrello piove sempre
[C] Tutti i giorni in cui non piove esco con l’ombrello
[D] Tutti i giorni che è piovuto ho preso l’ombrello

Una proposizione che è sempre vera indipendentemente dalla verità degli elementi che lo compongono è detta **tautologia**. Una proposizione che è sempre falsa indipendentemente dalla verità dei suoi elementi è invece della **contraddizione**.

Esempi

- La proposizione composta $p \wedge \neg p$ è una contraddizione in quanto è sempre falsa.
- La proposizione composta $p \vee \neg p$ è una tautologia in quanto è sempre vera.

9 Costruisci le tavole di verità per le proposizioni composte $r = (p \wedge q) \wedge (\neg q)$ $s = (p \vee q) \vee (\neg q)$
Cosa puoi dire delle proposizioni *r* ed *s*?

Predicati e quantificatori

Una proposizione che fa riferimento a una proprietà o caratteristica di alcuni elementi di un insieme si chiama **predicato**. Le frasi formate da un predicato che ha alcuni argomenti incogniti si dicono **enunciati aperti**. Per esempio, p = “x è un numero intero maggiore di 10” è un enunciato aperto.
Consideriamo ora le seguenti affermazioni:

- "Tutti gli uomini sono mortali" si riferisce a un qualsiasi essere umano;
- "Tutti i multipli di 6 sono anche multipli di 2" è vera per tutti i numeri multipli di 6;
- "Ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo".

I predicati precedenti non riguardano un elemento specifico ma una certa quantità di elementi. I termini "tutti" e "ogni", detti **quantificatori universali**, indicano che una proprietà è vera per tutti gli elementi di un certo insieme. In logica matematica si usa il simbolo ∀, leggi "per ogni", per indicare il quantificatore universale.
Vediamo ora i seguenti predicati:

- "Esiste un numero che elevato al quadrato dà 16"
- "Alcuni numeri pari sono anche multipli di 3."

Queste affermazioni esprimono proprietà che sono vere almeno per un elemento dell'insieme di riferimento: la prima frase è vera per i numeri +4 e -4, la seconda frase è vera per i numeri 6, 12, 18, …
I termini "c'è almeno", "alcuni", "esiste almeno uno" si dicono **quantificatori esistenziali** e si indicano con il simbolo ∃, leggi "esiste".
Bisogna prestare particolare attenzione quando si negano frasi in cui compaiono i quantificatori. Per esempio la negazione di "Tutti i gatti fanno le fusa" non è "Nessun gatto fa le fusa" bensì "Non tutti i gatti fanno le fusa" che si può esprimere anche con il quantificatore esistenziale "c'è almeno un gatto che non fa le fusa".
La negazione della frase "L'anno scorso siamo stati tutti promossi" non è "L'anno scorso siamo stati tutti bocciati" ma "L'anno scorso c'è stato almeno uno di noi che non è stato promosso".

Esempio

- Se si considera la proposizione p = “Tutti i quadrati hanno due diagonali”, la sua negazione è la proposizione ¬p = “Non tutti i quadrati hanno due diagonali”.

Il linguaggio comune ci indurrebbe a considerare come negazione di p la proposizione “Nessun quadrato ha due diagonali”, in realtà per avere la negazione della proposizione p basta che esista almeno un quadrato che non ha due diagonali.

10 Scrivi le negazioni delle seguenti frasi che contengono dei quantificatori

a. Al compito di matematica eravamo tutti presenti.
b. Ogni giorno il professore ci dà sempre compiti per casa.
c. Ogni giorno Luca vede il telegiornale.
d. Tutti i miei familiari portano gli occhiali.
e. Tutti hanno portato i soldi per la gita.

L’implicazione

Nel linguaggio matematico sono comuni proposizioni del tipo “Se p allora q”. Ad esempio “Se un numero è multiplo di 12 allora è multiplo di 3”. La frase precedente può essere espressa dicendo:

“Essere multiplo di 12 implica essere multiplo di 3”.

In logica frasi del tipo “Se p allora q” vengono tradotte utilizzando l’operatore infisso (ovvero interposto fra le proposizioni) $\Rightarrow$ detto **implicazione**.

La scrittura “se p allora q” si traduce con la scrittura $p \Rightarrow q$, che si legge “p implica q”.

La proposizione p è detta **antecedente**, (o **ipotesi**) la proposizione B è detta **conseguente** (o **tesi**).

Il significato logico della proposizione $p \Rightarrow q$ è che “tutte le volte che la proposizione p è vera allora risulta vera anche la proposizione q”. Ovvero non si dà il caso che p sia vera e q sia falsa.

Per esempio, l'affermazione “Se c'è il sole andiamo al mare” è falsa solo quando c'è il sole e non andiamo al mare; l'affermazione, infatti, non dice nulla se il sole non c'è: quindi se non c'è il sole si è liberi di andare o non andare al mare. Anche l'affermazione “Se studi sarai promosso” dice solo che se studi dovrai essere promosso, non dice nulla per il caso in cui tu non studi, in questo caso infatti potrai essere ugualmente promosso.

La tavola di verità è la seguente:

p	q	$t=p\rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Uno degli errori logici più comuni è quello di pensare che da $p\Rightarrow q$ si possa dedurre $\neg p\Rightarrow\neg q$.
Ad esempio dall'affermazione "Se piove prendo l'ombrello" qualcuno può pensare che si possa dedurre "Se non piove non prendo l'ombrello". Tuttavia, riflettendoci si intuisce che le due frasi non sono affatto consequenziali. Basta pensare che chi pronuncia la prima frase sta affermando che tutte le volte che piove prende naturalmente l'ombrello, ma non esclude la possibilità di prenderlo anche quando non piove (in effetti è saggio farlo se il cielo è coperto da nuvoloni neri!).
Così la frase: a) "Se x è multiplo di 12 allora è multiplo di 3"
non vuol dire: b) "Se x non è multiplo di 12 allora non è multiplo di 3"
Infatti la (a) è vera, mentre la (b) è falsa (si pensi al 6 che non è multiplo di 12 ma è multiplo di 3).
Ciò che ragionevolmente si può dedurre da $p\Rightarrow q$ è $\neg q\Rightarrow\neg p$.
Ad esempio da:
"Se x è multiplo di 12 allora è multiplo di 3"
si può dedurre:
"Se x non è multiplo di 3 allora non è multiplo di 12"
Data l'implicazione $p\Rightarrow q$ la proposizione p viene detta **condizione sufficiente** per q. Mentre la proposizione q viene detta **condizione necessaria** per p.
Per esempio, studiare è condizione necessaria per essere promossi ma non è sufficiente.
Quest'ultima espressione fa appunto riferimento al fatto che da $p\Rightarrow q$ si può dedurre $\neg q\Rightarrow\neg p$. Ossia q è necessaria per p in quanto se non è vera q non è vera neanche p.
Calcoliamo la tavola di verità di $p\Rightarrow q$ e di $\neg q\Rightarrow\neg p$

p	q	$p\Rightarrow q$		$\neg q$	$\neg p$	$\neg q\Rightarrow\neg p$
V	V	V		F	F	V
V	F	F		V	F	F
F	V	V		F	V	V
F	F	V		V	V	V

Come si vede, le due proposizioni hanno gli stessi valori di verità.

In generale, data un'implicazione $p\Rightarrow q$ (proposizione **diretta**):

- l'implicazione $\neg p\Rightarrow\neg q$ si dice **contraria** di $p\Rightarrow q$;
- l'implicazione $q\Rightarrow p$ si dice **inversa** di $p\Rightarrow q$;
- l'implicazione $\neg q\Rightarrow\neg p$ si dice **contronominale** (o **controinversa**) di $p\Rightarrow q$.

La **doppia implicazione**, o **equivalenza logica**, di due proposizioni p e q dà luogo a una proposizione che in simboli si rappresenta $p\Leftrightarrow q$ (leggasi "p se e solo se q") che è vera se p e q sono entrambe vere o entrambe false. La tavola di verità è la seguente:

p	q	$p\Leftrightarrow q$		$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
V	V	V		V	V	V
V	F	F		F	V	F
F	V	F		V	F	F
F	F	V		V	V	V

L'operatore $\Leftrightarrow$ è detto di doppia implicazione perché se vale $p\Leftrightarrow q$ allora valgono anche $p\Rightarrow q$ e $q\Rightarrow p$, e viceversa. Nella tabella precedente, infatti, è stata messa in evidenza l'equivalenza logica tra la proposizione $p\Leftrightarrow q$ e la proposizione $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$.

L'equivalenza logica è un relazione di equivalenza, infatti verifica le seguenti proprietà

- $p\Leftrightarrow p$ riflessiva
- se $p\Leftrightarrow q$ allora vale anche $q\Leftrightarrow p$ simmetrica
- se $p\Leftrightarrow q$ e $q\Leftrightarrow r$ allora vale anche $p\Leftrightarrow r$ transitiva.

In matematica si usa spesso l'espressione "p è **condizione necessaria e sufficiente** per q". Per esempio "Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia divisibile per 3 è che la somma delle sue cifre sia divisibile per 3". Il significato della frase è che "p è sufficiente per q" e inoltre "p è necessario per q". In

altre parole significa dire che $p \Rightarrow q$ e . $q \Rightarrow p$ Nel caso dell'esempio, "se un numero è divisibile per 3 allora la somma delle sue cifre è divisibile per 3" e vale anche l'implicazione inversa "se la somma delle cifre di un numero è divisibile per 3 allora il numero stesso è divisibile per 3".

11 Sono date le frasi p = "Mario è cittadino romano", q = "Mario è cittadino italiano", scrivi per esteso le seguenti implicazioni e indica quale di esse è vera.

a) $p \Rightarrow q$ V F b) $q \Rightarrow p$ V F c) $q \Leftrightarrow p$ V F

12 Trasforma nella forma "Se… allora…" le seguenti frasi:

a. Un oggetto lanciato verso l'alto ricade a terra.
b. Quando piove prendo l'ombrello.
c. I numeri la cui ultima cifra è 0 sono divisibili per 5.
d. Per essere promosso occorre aver raggiunto la sufficienza.

13 Date le proposizioni p e q costruire la tavola di verità di $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

14 Scrivere la contronominale di "Tutti gli alunni che hanno avuto il debito in matematica hanno avuto almeno due valutazioni insufficienti in matematica".

I teoremi

Un **teorema** è una proposizione composta del tipo $I \Rightarrow T$, cioè una implicazione tra due proposizioni, dette Ipotesi e Tesi. Dimostrare un teorema significa fare un ragionamento che permetta di concludere che la Tesi è vera avendo supposto che l'Ipotesi è vera. Nel caso in cui un teorema sia dimostrabile all'interno di una teoria, si dice che è un teorema valido. In riferimento alla terminologia usata quando abbiamo parlato dell'implicazione, chiamiamo $I \Rightarrow T$ "teorema diretto", $T \Rightarrow I$ "teorema inverso", $\neg I \Rightarrow \neg T$ "teorema contrario", $\neg T \Rightarrow \neg I$ "teorema controinverso", e ribadiamo l'equivalenza tra il teorema diretto ed il teorema contro inverso, nonché l'equivalenza tra il teorema contrario ed il teorema inverso, mentre in generale la validità del teorema diretto non implica la validità del teorema inverso, e viceversa. Nel caso particolare in cui vale sia $I \Rightarrow T$ sia $T \Rightarrow I$, si scrive $I \Leftrightarrow T$ e si dice che Ipotesi e Tesi sono **logicamente equivalenti**. Più precisamente, nel linguaggio specifico delle scienze che fanno uso della logica, e quindi anche nel linguaggio della Geometria Razionale, se vale $I \Rightarrow T$, si dice che "I è **condizione sufficiente** per T" e anche che "T è **condizione necessaria** per I"; se in particolare vale $I \Leftrightarrow T$, si usa dire che "I è **condizione necessaria e sufficiente** per T".
In generale incontreremo molti teoremi che vengono denominati genericamente "**proposizioni**", perché il nome di "Teorema" viene tradizionalmente attribuito solo ai teoremi più importanti. Inoltre si usa chiamare "**lemma**" una proposizione che non ha una grande importanza di per sé, ma che è particolarmente utile per la dimostrazione di altri teoremi. Si chiama invece "**corollario**" un teorema importante che è una conseguenza immediata di un altro teorema.
Così come abbiamo visto che non è possibile definire tutto e che quindi bisogna assumere alcune nozioni come primitive, analogamente non è possibile dimostrare tutte le proposizioni di una teoria. Alcune proposizioni devono essere assunte come vere e costituiscono la base della dimostrazione dei teoremi; queste proposizioni si chiamano "**postulati**" o "**assiomi**". Risulta evidente che cambiando sia pure uno solo degli assiomi cambiano anche i teoremi dimostrabili e quindi la teoria.
In generale, come abbiamo detto, dato un teorema (diretto) del tipo $p \Rightarrow q$, la sua validità non garantisce la validità del teorema (inverso) $q \Rightarrow p$. Questo però può succedere. In ogni caso, se sono vere $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, le due proposizioni sono **logicamente equivalenti,** ossia $p \Leftrightarrow q$.

Esempio

- *Teorema*: un triangolo che ha i lati uguali ha anche gli angoli uguali.

Il teorema si può schematizzare nel seguente modo: p = "un triangolo ha i lati uguali"; q = "un triangolo ha gli angoli uguali". Il teorema enunciato è $p \Rightarrow q$. Il teorema inverso è $q \Rightarrow p$, cioè:

- *Teorema inverso*: un triangolo che ha gli angoli uguali ha anche i lati uguali.

In tale esempio sono validi sia il teorema diretto sia il teorema inverso. Il fatto che uno dei due teoremi sia chiamato diretto e l'altro inverso è un fatto soggettivo, che può dipendere semplicemente dall'ordine con cui si enunciano i teoremi.
Il teorema precedente si può esporre allora nel seguente modo.

- *Teorema*: un triangolo ha i lati uguali se e solo se ha gli angoli uguali.

La deduzione

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato in modo generico di implicazione, deduzione, dimostrazione. Facciamo ora attenzione alla differenza tra *implicazione materiale* e *deduzione logica*. L'**implicazione** è un'operazione tra proposizioni, mentre la **deduzione** è il ragionamento che costituisce la base della dimostrazione di un teorema. Per l'implicazione materiale si usa il simbolo $\rightarrow$ mentre per la deduzione logica si usa il simbolo $\Rightarrow$.

La frase "Se 5 è un numero pari, allora il triangolo ha 4 lati" è perfettamente valida ed anzi è vera, poiché la premessa (proposizione antecedente) è falsa, per cui l'implicazione è vera anche se la proposizione conseguente è falsa (si tenga presente la tavola di verità di $p \rightarrow q$).

Si noti però che la definizione di implicazione ha senso solamente se la premessa è vera, il suo ampliamento al caso in cui la premessa è falsa è motivata da ragioni di completezza della trattazione. Bisogna quindi fare attenzione ad usare l'implicazione logica quando la premessa è falsa. Teniamo comunque conto che se *p* è falsa allora $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$ cioè $p \rightarrow (q \wedge \neg q)$ è vera. Ma $q \wedge \neg q$ è una contraddizione, quindi una premessa falsa implica sempre una contraddizione.

In realtà, la **dimostrazione** di un teorema non è la verifica della validità dell'implicazione, anzi è un procedimento che fa uso della validità dell'implicazione stessa. In un teorema si parte dal supporre vera l'ipotesi e si dimostra, mediante gli assiomi ed altri teoremi già dimostrati in precedenza, che anche la tesi è vera (questo se si vuole seguire il procedimento diretto). Se si vuole seguire il procedimento indiretto (o per assurdo), si suppone che la tesi sia falsa e, sempre mediante assiomi e altri teoremi già dimostrati, si arriva ad affermare che l'ipotesi è falsa (cosa che non si deve accettare).

Le principali regole del corretto ragionamento seguono alcuni schemi particolari (detti sillogismi, dal nome attribuito ad essi da Aristotele). Presentiamo qui i quattro principali sillogismi: il *modus ponens*, il *modus tollens*, il sillogismo disgiuntivo, il sillogismo ipotetico.

		Modus ponens		Modus tollens		Sillogismo disgiuntivo			Sillogismo ipotetico
1ª premessa 2ª premessa		$p \Rightarrow q$ p		$p \Rightarrow q$ $\neg q$		$p \vee q$ $\neg q$	$p \vee q$ $\neg p$		$p \Rightarrow q$ $q \Rightarrow r$
conclusione		q		$\neg p$		p	q		$p \Rightarrow r$

Suggeriamo una lettura degli schemi appena esposti:

- **modus ponens**: "se sappiamo che p implica q, e sappiamo che p è vera, allora possiamo concludere che anche q è vera" (metodo diretto di dimostrazione);
- **modus tollens**: "se sappiamo che p implica q, e sappiamo che q è falsa, allora possiamo concludere che anche p è falsa" (metodo indiretto di dimostrazione);
- **sillogismo disgiuntivo**: "se sappiamo che, tra p e q, almeno una delle due è vera, e sappiamo che q (rispettivamente p) è falsa, allora possiamo concludere che p (rispettivamente q) è vera";
- **sillogismo ipotetico**: "se sappiamo che p implica q, e sappiamo che q implica r, allora possiamo concludere che p implica r" (proprietà transitiva dell'implicazione).

Altre regole (note come i **Giudizi** di Aristotele) fanno uso dei predicati e dei quantificatori, per cui riprendiamo l'Esempio 3 e vediamo di tradurre la frase "Tutti i quadrati hanno due diagonali" e la sua negazione "Non tutti i quadrati hanno due diagonali" in formule che fanno uso anche del linguaggio degli insiemi. Se chiamiamo Q l'insieme di tutti i quadrati, e chiamiamo P la proprietà dell'avere due diagonali, se x è il generico quadrato (elemento di Q), P(x) è il predicato "x gode della proprietà P", cioè "x ha due diagonali", la frase "Tutti i quadrati hanno due diagonali" si traduce così in simboli: $\forall x \in Q$, P(x).

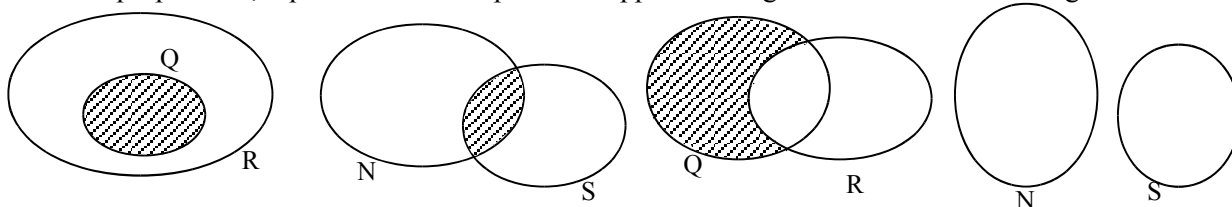
La sua negazione è: "Esiste almeno un quadrato che non ha due diagonali, cioè che non gode della proprietà P", e si traduce in simboli così: $\exists x \in Q$, $\neg$P(x).

In quest'ultimo caso, la virgola può anche essere sostituita da una barra verticale ("|") e si legge "tale che".

Analogamente, una frase del tipo "Esiste almeno un numero naturale che sia divisore di 10" può scriversi come: $\exists n \in N$, D(n), dove D è la proprietà dell'essere divisore di 10 e D(n) significa che n verifica la proprietà D, cioè che n è un divisore di 10. La sua negazione è "Nessun numero naturale è divisore di 10", ovvero "preso un qualsiasi numero naturale n, questo non gode della proprietà D" e la traduzione in simboli di tale frase è: $\forall n \in N$, $\neg$D(n).

È il caso di inserire in uno schema queste quattro proposizioni (che corrispondono ai Giudizi di Aristotele):

A – Giudizio universale affermativo	$\forall x \in Q, P(x)$ P è vera per ogni x	I – Giudizio particolare affermativo	$\exists n \in N, D(n)$ D è vera per almeno un n
O – Giudizio particolare negativo	$\exists x \in Q, \neg P(x)$ P è falsa per almeno un x	E – Giudizio universale negativo	$\forall n \in N, \neg D(n)$ D è falsa per ogni n

Se chiamiamo R l'insieme degli elementi che verificano la proprietà P, e S l'insieme degli elementi che verificano la proprietà D, i quattro Giudizi si possono rappresentare graficamente nel modo seguente:

15 Completa i seguenti ragionamenti:

a) Se un numero è multiplo di 10 allora è pari; il numero n non è pari quindi … … … ………

b) Se il sole tramonta fa buio; il sole è tramontato quindi … … … … … … … … … … … …

La dimostrazione

Tenendo conto di quanto detto precedentemente, dimostrare che $I \Rightarrow T$ significa fare un ragionamento che permetta di concludere che la tesi T è vera avendo supposto che l'ipotesi I è vera.

Quando attraverso un ragionamento logico, e cioè attraverso una catena di implicazioni del tipo $I \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow \ldots \Rightarrow T$, si riesce a dedurre la verità di una proposizione T a partire dalla verità di una proposizione I, si dice che si è data una **dimostrazione** diretta del **teorema** $I \Rightarrow T$ (attraverso le regole del *modus ponens* e del *sillogismo ipotetico*). Le regole da seguire sono state in parte illustrate quando si è parlato di deduzione.

Un teorema può anche essere dimostrato per assurdo, o con metodo indiretto, che consiste nel partire dalla negazione di T e, attraverso una catena di implicazioni, arrivare alla negazione di I o, in generale, ad una contraddizione.

Esistono altri metodi di dimostrazione, di cui eventualmente si parlerà più diffusamente qualora si dovesse ricorrere ad essi. Per ora ci limitiamo a citarne un paio: dimostrazione per *induzione* e dimostrazione mediante *esempio* o controesempio.

La **dimostrazione per induzione** si usa in particolare quando vogliamo dimostrare una proprietà generale che vale per molte categorie di figure ma che non si può esprimere in maniera unica per tutte le categorie (ad esempio una proprietà che vale per tutti i poligoni ma che dipende dal numero dei lati, come l'estensione dei criteri di congruenza dei triangoli a poligoni di più lati).

Si usa invece un **esempio** quando bisogna dimostrare che una certa proprietà vale per almeno un oggetto del nostro studio o un **controesempio** per dimostrare che una proprietà non vale per tutti gli oggetti in esame.

Per fornire alcuni esempi di dimostrazione, avremmo bisogno di fissare prima i concetti di base e gli assiomi da cui partire, per cui rinviamo la questione al prossimo paragrafo.

Ma a cosa serve studiare la dimostrazione di un teorema? Perché non ci limitiamo ad elencare i teoremi? Per molte applicazioni basta in effetti conoscere il teorema e a volte anche soltanto la formula risolutiva. Tuttavia studiando le dimostrazioni si impara a dimostrare e quindi si impara a creare nuova matematica. Un altro importante vantaggio è che la dimostrazione spiega perché il teorema è vero e permette di scoprire la struttura nascosta nelle definizioni e nei teoremi. Quando si studia una dimostrazione non bisogna limitarsi a leggerla e a impararla a memoria, occorre leggerla attivamente, ponendo attenzione su cosa si fa e cercando di anticipare i passaggi. Se un passaggio non è chiaro bisogna prima tornare indietro per capire come ci si è arrivati e poi si cerca di capire il perché l'autore ha messo quel passaggio. In generale, una dimostrazione va letta più volte smettendo solo quando si è compresa a fondo.

16 Dimostra con un controesempio che non è vera l'affermazione "Tutti i multipli di 3 sono dispari".

17 Nel teorema "Il quadrato è anche rettangolo" esplicitare l'ipotesi e la 'tesi'. Enunciare il teorema contrario. Trova un contro esempio che dimostra che il teorema contrario è falso.

18 Dimostra per assurdo il teorema "Se un numero non è divisibile per 2 allora non è divisibile per 10".

19 Ecco le dichiarazioni rilasciate da quattro amiche: Anna: “Io sono la più anziana”; Carla: “Io non sono né la più giovane né la più anziana”; Liliana: “Io non sono la più giovane”; Milena: “Io sono la più giovane”. Il fatto è che una di loro (e solo una) ha mentito. Chi è, delle quattro amiche, effettivamente la più giovane?
(*Giochi d'autunno, 2010*)

20 Dopo una rissa in campo l'arbitro vuole esplellere il capitano di una squadra di calcio. E' uno tra Paolo, Andrea e Gabriele ma, siccome nessuno ha la fascia al braccio, non sa qual è dei tre. Paolo dice di non essere il capitano; Andrea dice che il capitano è Gabriele; Gabriele dice che il capitano è uno degli altri due. Sapendo che uno solo dei tre dice la verità, quale delle affermazioni seguenti è sicuramente vera?
[A] Gabriele non è il capitano,
[B] Andrea dice la verità,
[C] Paolo dice la verità,
[D] Andrea è il capitano,
[E] Gabriele mente. (*I Giochi di Archimede, 2011*)

21 Un celebre investigatore sta cercando il colpevole di un omicidio tra cinque sospettati: Anna, Bruno, Cecilia, Dario ed Enrico. Egli sa che il colpevole mente sempre e gli altri dicono sempre la verità. Anna afferma: “Il colpevole è un maschio”, Cecilia dice: “E' stata Anna oppure è stato Enrico”. Infine Enrico dice: “Se Bruno è colpevole allora Anna è innocente”. Chi ha commesso l'omicidio?
(*I Giochi di Archimede, 2010*)

22 Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quatttro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa. Anna dice: “Io ho un poker!” (quattro carte dello stesso valore). Bea dice: “Io ho tutte e cinque le carte di cuori”. Caio dice: “Io ho cinque carte rosse”. Infine Dino dice: “Io ho tre carte di uno stesso valore e anche le altre due hanno lo stesso valore”. Sappiamo che una e una sola delle affermazioni è falsa; chi sta mentendo?
(*I Giochi di Archimede, 2009*)

23 Un satellite munito di telecamera inviato sul pianeta Papilla ha permesso di stabilire che è falsa la convinizione di qualcuno che: “su Papilla sono tutti grassi e sporchi”. Quindi adesso sappiamo che: [A] su Papilla almeno un abitante è magro e pulito, [B] su Papilla sutti gli abitanti sono magri e puliti, [C] almeno un abitante di Papilla è magro, [D] almeno un abitante di Papilla è pulito, [E] se su Papilla tutti gli abitanti sono sporchi, almeno uno di loro è magro.
(*I Giochi di Archimede, 2008*)

24 Anna, Barbara, Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex-equo. Al ritorno, Anna dice: “Chiara è arrivata prima di Barbara”; Barbara dice: “Chiara è arrivata prima di Anna”; Chiara dice: “Io sono arrivata seconda”. Sapendo che una sola di esse ha detto la verità,
[A] si può dire solo chi ha vinto,
[B] si può dire solo chi è arrivata seconda,
[C] si può dire solo chi è arrivata terza,
[D] si può dire solo chi è arrivata ultima,
[E] non si può stabile la posizione in classifica di nessuna. (*I Giochi di Archimede, 2000*)

25 “In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti promossi”. Volendo negare questa affermazione, quale dei seguenti enunciati sceglieresti?
[A] In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti bocciati. [B] In ogni scuola c'è almeno un bocciato in tutte le classi. [C] C'è almeno una scuola che ha almeno un bocciato in ogni classe. [D] C'è almeno una scuola in cui c'è una classe che ha almeno un bocciato. (*I Giochi di Archimede, 1999*)

26 Se il pomeriggio ho giocato a tennis, la sera ho fame e se la sera ho fame, allora mangio troppo. Quale delle seguenti conclusioni non posso trarre da queste premesse?
[A] Se gioco a tennis il pomeriggio, allora la sera ho fame e mangio troppo
[B] se la sera ho fame, allora mangio troppo, oppure ho giocato a tennis il pomeriggio
[C] se la sera non ho fame, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio
[D] se la sera non ho fame, allora non mangio troppo
[E] se la sera non mangio troppo, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio.
(*I Giochi di Archimede, 1997*)

27 Su un isola vivono tre categorie di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, i furfanti, che mentono sempre, ed i paggi che dopo una verità dicono sempre una menzogna e viceversa. Sull'isola incontro un vecchio, un ragazzo e una ragazza. Il vecchio afferma: “Io sono paggio”; “Il ragazzo è cavaliere”. Il ragazzo dice: “Io sono cavaliere”; “La ragazza è paggio”. La ragazza afferma infine: “Io sono furfante”; “Il vecchio è paggio”. Si può allora affermare che:
[A] c'è esattamente un paggio
[B] ci sono esattamente due paggi
[C] ci sono esattamente tre paggi
[D] non c'è alcun paggio
[E] il numero dei paggi non è sicuro.
(*I Giochi di Archimede, 1998*)

►3. Gli enti fondamentali della geometria

In questo paragrafo diamo un cenno del sistema assiomatico della geometria razionale facendo riferimento principalmente all'impostazione assiomatica di Hilbert.

Concetti primitivi

Sono concetti primitivi per la geometria il **punto**, la **retta** e il **piano**. Di essi non si dà una definizione e costituiscono la base per definire tutti gli altri enti della geometria.

Oltre a questi tre enti primitivi occorre poi assumere l'esistenza di tre relazioni primitive tra gli enti geometrici: **giacere su**, **stare fra**, **essere congruente a**. Queste relazioni permettono di stabilire dei legami tra gli enti geometrici, per esempio: "un punto giace su una retta", "un punto sta fra altri due punti", "un segmento è congruente a un altro segmento", …

Esiste una simbologia convenzionale condivisa dagli studiosi per indicare questi enti:

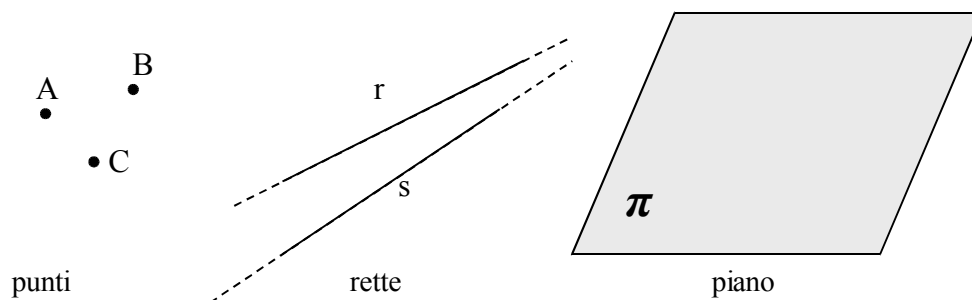
- per indicare un punto usiamo una lettera maiuscola, A, B, C, …;
- per indicare una retta usiamo una lettera minuscola, a, b, c, …;
- per indicare un piano usiamo una lettera greca: α , β , γ , … .

Ricordiamo l'alfabeto greco, per gli studenti che hanno poca familiarità con esso:
Lettere greche minuscole: α (alfa) , β (beta) , γ (gamma) , δ (delta) , ϵ (epsilon) , ζ (zeta) , η (eta) , θ (theta) , ι (iota) , κ (kappa) , λ (lambda) , μ (mi) , ν (ni) , ξ (xi) , o (omicron) , π (pi o pi greca) , ρ (rho) , σ (sigma) , τ (tau) , υ (ipsilon) , ϕ (fi) , χ (chi) , ψ (psi) , ω (omega) .
Lettere greche maiuscole:
A , B , Γ , Δ , E , Z , H , Θ , I , K , Λ , M , N , Ξ , O , Π , P , Σ , T , Y , Φ , X , Ψ , Ω .

Per il simbolo di congruenza si usa —

- Degli enti fondamentali Euclide aveva dato le seguenti definizioni:
- **Punto** è ciò che non ha parti.
- **Linea** è lunghezza senza larghezza.
- **Superficie piana** è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa.

Le definizioni in questo caso sono utili per farci un'idea intuitiva di essi. Tuttavia, come è già stato detto in precedenza, e da quanto si intuisce osservando le definizioni euclidee, per definire il punto si utilizza la nozione di parte: punto è ciò che non ha parti. Occorrerebbe quindi definire che cosa è una *parte*. Ma per definire un *parte* avremmo bisogno di altre nozioni di partenza, in un procedimento senza fine. Per questo motivo nell'impostazione assiomatica moderna si preferisce non dare la definizione dei tre enti primitivi e 'definirli implicitamente' attraverso le proprietà di cui godono. Ciò significa che si preferisce dare maggiore importanza a come essi si comportano e cosa possiamo fare con essi, piuttosto che descrivere cosa sono.

Dal punto di vista della rappresentazione grafica si usano le seguenti convenzioni:

Rappresentazione grafica degli enti fondamentali della geometria.

Postulati

Un postulato, o assioma, è una proposizione, spesso intuitiva, evidente ma non dimostrata, ammessa come vera in quanto necessaria per costruire poi le dimostrazioni dei teoremi.

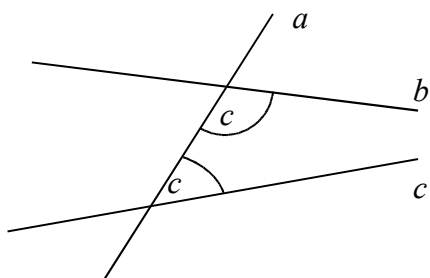
Euclide nei suoi *Elementi* aveva individuato un gruppo di cinque assiomi, che riguardano le nozioni comuni e quindi non fanno riferimento alla geometria, e un gruppo di cinque postulati che riguardano proprietà geometriche.

Assiomi di Euclide

I. Cose che sono uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro.
II. Se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
III. Se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
IV. Cose che coincidono fra loro sono uguali.
V. Il tutto è maggiore della parte.

Postulati di Euclide

I. Si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
II. Un segmento si possa prolungare indefinitamente in linea retta.
III. Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio.
IV. Tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.
V. Se una retta che taglia due rette forma dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando illimitatamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

.

Nella figura, la retta *a* taglia le rette *b* e *c*, formando sul lato destro due angoli e la cui somma è minore di due angoli retti. Prolungando opportunamente le rette *b* e *c* risulta che esse si incontrano sul lato destro della figura

Nell'impostazione assiomatica moderna di Hilbert, gli assiomi hanno la funzione di definire implicitamente gli enti primitivi, cioè di fissare le proprietà alle quali questi enti devono soddisfare. Hilbert aggiunge inoltre altri assiomi che Euclide stesso non aveva esplicitato chiaramente.

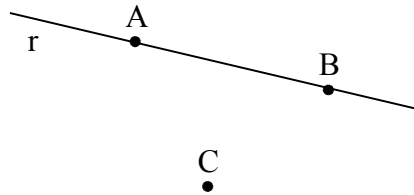
Assiomi di Hilbert

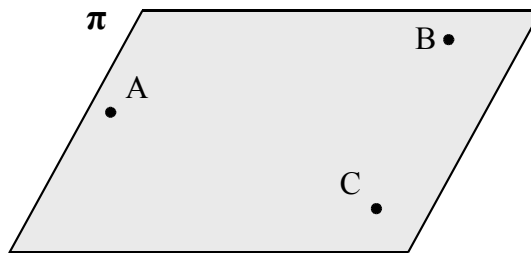
L'esposizione che segue è una semplificazione degli assiomi del grande matematico tedesco; chi vuole studiare direttamente il testo originale può consultare http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf [ultima consultazione 26.02.2012].

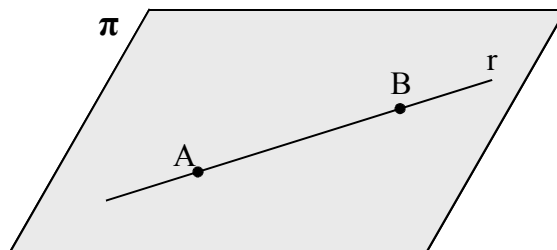
Hilbert assume come enti primitivi della geometria piana il punto e la retta, come relazioni primitive l'appartenenza di un punto ad una retta, il giacere di un punto tra altri due punti, e la congruenza di segmenti.

ASSIOMI DI APPARTENENZA*:* "giacere su":

I. Dati due punti distinti, esiste una e una sola retta che contiene entrambi i punti.

II. Ogni retta contiene almeno due punti. Esistono almeno tre punti che non giacciono su questa retta.

Due punti A e B giacciono sempre su un retta, questa retta è unica, esiste sempre almeno un terzo punto C che non giace sulla retta r.

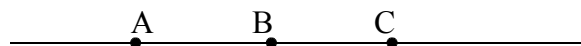
III. Dati tre punti non allineati, esiste uno e un solo piano che contiene tutti e tre i punti. Ogni piano contiene almeno un punto.

Per tre punti non allineati, A, B, C, passa un piano π , questo piano è unico.

IV. Se due punti di una retta giacciono su un piano, allora anche tutti gli altri punti della retta giacciono su questo piano.

Se i punti A e B giacciono sul piano π , tutti i punti della retta r, che contiene i punti A e B, giacciono sul piano π .

V. Se un punto giace su due piani distinti, allora esiste almeno un altro punto giacente su entrambi questi piani.

VI. Esistono almeno quattro punti che non giacciono sullo stesso piano.

ASSIOMI DI ORDINAMENTO: "stare fra":

VII. Se un punto B giace fra i punti A e C, allora i punti A, B e C sono tre punti distinti sulla stessa retta, e B giace fra C ed A.

Se B sta tra A e C, allora sta anche tra C e A, e i tre punti sono allineati.

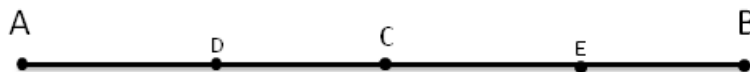
VIII. Dati due punti A e C, esiste almeno un punto B, sulla retta AC, giacente fra di essi.

XI. Dati tre punti qualsiasi di una retta, uno e uno solo di essi giace fra gli altri due.

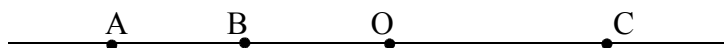
Gli ultimi assiomi ci permettono di dedurre il seguente

TEOREMA. **Tra due punti di una retta esiste sempre una quantità illimitata di altri punti.**

Dimostrazione

Data una retta r e due suoi punti A e B, per l'assioma VIII sappiamo che esiste un terzo punto C sulla retta r che giace tra A e B. Ma allora esiste un punto D su r che giace tra A e C e un punto E che giace tra C e B. Per lo stesso assiona esisteà un punto tra A e D, uno tra D e C, uno tra C e B, e così via.

DEFINIZIONE. Si chiama **segmento** AB l'insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno stanno sulla retta tra A e B.

Gli assiomi di ordinamento ci permettono di dare anche la seguente

DEFINIZIONE. Presi quattro punti ABCO su una retta, in modo che B stia tra A e O e O stia tra A e C possiamo dire che A e B **stanno dalla medesima parte rispetto a** O, mentre A e C non stanno dalla medesima parte rispetto a O.

A e B stanno dalla medesima parte rispetto a O; A e C non stanno dalla medesima parte rispetto a O.

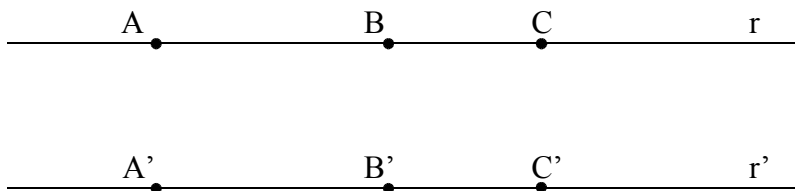
Trascuriamo in questa trattazione elementare l'Assioma di Pasch (X) e l'Assioma delle parallele (XI)

ASSIOMI DI CONGRUENZA: "essere congruente a"

XII. *Assioma del trasporto di un segmento*. Se A, B sono due punti di una retta *a* e A' è un punto sulla stessa retta (o fissato su un'altra retta *a')*, si può sempre trovare un punto B' sulla retta a (o su a'), da una data parte rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente al segmento A'B'.

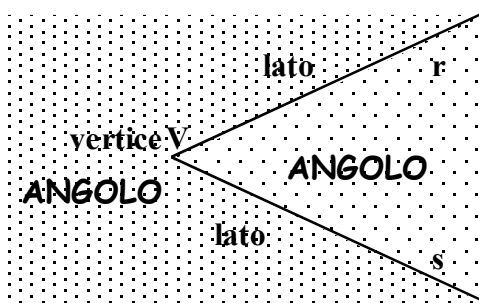
Assioma del trasporto di un segmento.

XIII. La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva, cioè se A′B′ e A″B″ sono congruenti ad AB, allora A′B′ è congruente a A″B″.

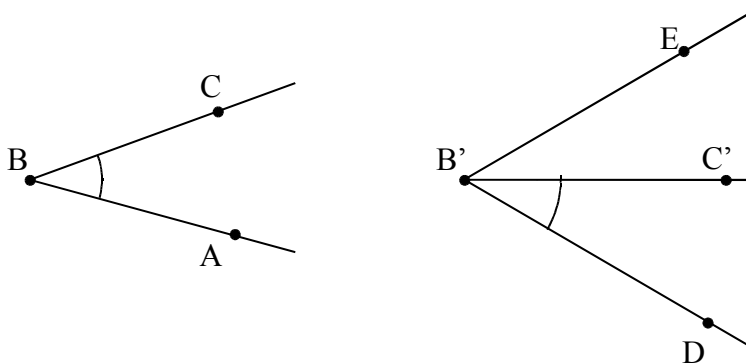
XIV. Siano AB e BC segmenti su una retta *r* privi di punti comuni a parte B, e siano A′B′ e B′C′ segmenti su una retta *r′* privi di punti comuni a parte B'. Se e $AB \cong A'B'$ $BC \cong B'C'$, allora $AC \cong A'C'$.

AB e A'B' sono segmenti congruenti, anche BC e B'C' sono segmenti congruenti, allora AC e A'C' sono segmenti congruenti.

Prima di proseguire con gli altri assiomi premettiamo la seguente

DEFINIZIONE. Chiamiamo **semiretta** la parte di retta costituita da un punto di essa, detto **origine** della semiretta, e da tutti i punti che stanno dalla stessa parte rispetto all'origine.

DEFINIZIONE. Si dice **angolo** ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette si dicono **lati** dell'angolo; l'origine comune alle due semirette si dice **vertice** dell'angolo.

Le semirette r e s, aventi l'origine V comune individuano due regioni del piano dette angolo.

L'angolo individuato da tre punti ABC è l'angolo formato dalla semiretta con origine B e passante per A e dalla semiretta con origine B e passante per C. Questo angolo si indica con il simbolo $A\hat{B}C$. Graficamente si usa indicare un angolo con un archetto.

XV. Dati un angolo $A\hat{B}C$ ed una semiretta B'C' , esistono e sono uniche due semirette B'D e B'E, tali che l'angolo $D\widehat{B'}C'$ è congruente all'angolo $A\hat{B}C$ e l'angolo $E\widehat{B'}C'$ è congruente all'angolo $A\hat{B}C$.

Assioma XV, dato $A\hat{B}C$ è possibile costruire gli angoli $D\widehat{B'}C'$ e $E\widehat{B'}C'$ congruenti ad $A\hat{B}C$ ed aventi un lato su una semiretta prefissata.

XVI. La relazione di congruenza tra angoli è transitiva, cioè se $A'\widehat{B'}C'$ e $A''\widehat{B''}C''$ sono congruenti ad $A\hat{B}C$, allora $A'\widehat{B'}C' \cong A''\widehat{B''}C''$.

Assiomi di continuità

I. *Assioma di Archimede.* Sulla retta che unisce due punti qualsiasi A e B si prende un punto A_1, si prendono poi i punti A_2, A_3, A_4, … in modo che A_1 sta tra A e A_2, A_2 sta tra A_1 e A_3, A_3 tra A_2 e A_4 ecc. e che $AA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong A_3A_4$ ecc. Allora tra tutti questi punti esiste sempre un certo punto A_n tale che B sta tra A e A_n.

Figura 16. Dati i punti A e B sulla retta r si può sempre costruire la serie di segmenti congruenti $AA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong A_3A_4 \cong \ldots$ in modo da superare il punto B.

Assioma di completezza

II. Ad un sistema di punti, linee rette e piani è impossibile aggiungere altri elementi in modo tale che il sistema, così generalizzato, formi una nuova geometria obbediente a tutti i cinque gruppi di assiomi. In altre parole gli elementi della geometria formano un sistema che non è suscettibile di estensione, nel caso in cui si considerino validi i cinque gruppi di assiomi.

28 Gli enti primitivi della geometria sono quelli

[A] Che occorre definire
[B] Che occorre dimostrare
[C] Che non si definiscono
[D] Che si conoscono già per averli studiati prima

29 Gli assiomi sono

[A] Proposizioni note che si preferisce non dimostrare per non appesantire lo studio
[B] Proposizioni che è necessario dimostrare
[C] Proposizioni che si assumono vere senza dimostrazione
[D] Proposizioni che non si definiscono
[E] Proposizioni che non si dimostrano perché la loro dimostrazione è molto semplice

30 Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) Due punti sono sempre allineati V F
b) Tre punti sono sempre allineati V F
c) Tre punti sono sempre complanari V F
d) Tre punti allineati individuano un unico piano V F
e) Una retta e un punto esterno ad essa individuano un piano V F

31 Distingui nelle seguenti frasi le definizioni dalle proposizioni o proprietà

a) La Terra ruota su se stessa in un giorno. D P
b) Il solstizio è il momento in cui il Sole raggiunge, nel suo moto apparente lungo l'eclittica, il punto di declinazione massima o minima. D P
c) La cellula è l'unità fondamentale di tutti gli organismi viventi. D P
d) I virus sono responsabili di alcune malattie. D P
e) I numeri che hanno per ultima cifra 0 sono numeri pari. D P
f) Un numero si dice pari se è divisibile per 2. D P

32 Su una retta si segnano quattro punti ABCD, quanti segmenti restano individuati?

33 Date tre semirette a, b, c aventi la stessa origine O, quanti angoli restano individuati?

34 Unisci in tutti i modi possibili mediante rette tre punti non allineati e posti sullo stesso piano.

35 Unisci in tutti i modi possibili mediante rette quattro punti, a tre a tre non allineati, di uno stesso piano.

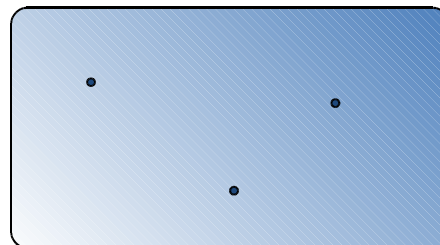
36 Quattro rette a due a due incidenti quanti punti di intersezioni individuano complessivamente?

37 Quale assioma è rappresentato in figura?

[A] tre punti distinti non allineati determinano uno ed un solo piano che li contiene

[B] su un piano esistono infiniti punti ed infinite rette

[C] la retta passante per due punti distinti di un piano giace completamente nel piano

[D] su una retta esistono infiniti punti

Rispondi a voce alle seguenti domande

38 Qual è l'origine della parola geometria?

39 Qual è la differenza tra assioma e teorema?

40 Qual è la differenza tra ente definito e ente primitivo?

►4. Prime definizioni: segmenti e angoli

Semirette e segmenti

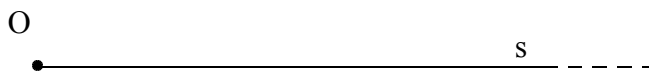
Nel paragrafo precedente abbiamo già introdotto alcune definizioni di base, necessarie per enunciare tutti i postulati della geometria secondo l'assiomatizzazione di Hilbert. In questo paragrafo costruiamo le prime definizioni. Per comodità del lettore riportiamo anche quelle già date.
Partiamo dalla nozione generica di figura.

DEFINIZIONE. Si chiama **figura** un qualsiasi insieme, non vuoto, di punti.

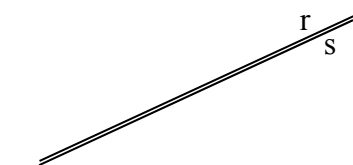
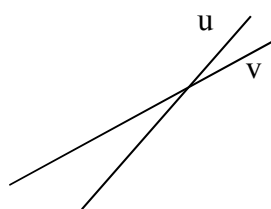
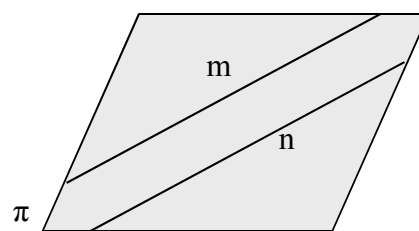
Questa definizione fa riferimento soltanto all'ente primitivo geometrico di punto.
Lo spazio non è considerato un ente primitivo, in quanto può essere ottenuto dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE. Si chiama **spazio** l'insieme di tutti i punti.

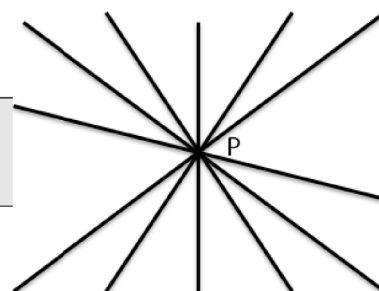
Risulta pertanto che una figura è un qualsiasi sottoinsieme dello spazio.
In base agli assiomi di ordinamento un qualunque punto P su una retta divide la retta in due parti, una è costituita dai punti che 'seguono' P, l'altra è costituita dai punti che 'precedono' P.

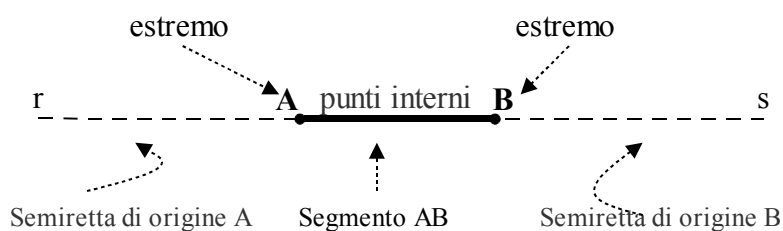
DEFINIZIONE. Si chiama **semiretta** la parte di retta costituita da un punto di essa, detto **origine** della semiretta, e da tutti i punti che stanno dalla stessa parte rispetto all'origine.

Solitamente, la semiretta si indica con una lettera latina minuscola.
Prendendo due qualsiasi rette dello spazio esse si possono trovare in diverse posizioni reciproche, cioè una rispetto all'altra.

DEFINIZIONE.
Due rette si dicono **complanari** se appartengono a uno stesso piano; se non appartengono a uno stesso piano si dicono **sghembe**.
Due rette complanari si dicono **incidenti** se hanno uno, e uno solo, punto in comune.
Due rette complanari che non hanno nessun punto in comune si dicono **parallele**.

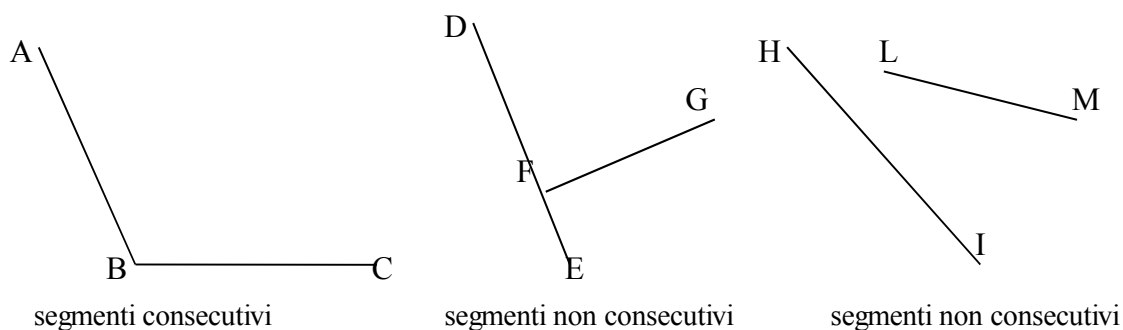
Se due rette hanno almeno due punti in comune sono **coincidenti**.

r e *s* sono coincidenti *u* e *v* sono incidenti *m* e *n* sono parallele

Per indicare che le rette *r* e *s* sono parallele si usa il simbolo *r//s*.
Fai attenzione al fatto che due rette non parallele possono appartenere a piani diversi, in questo caso non avranno punti in comune, sono cioè sghembe. Viceversa se due rette hanno un punto in comune allora sono sicuramente complanari. Inoltre, se hanno più di un punto in comune le rette coincidono, in questo caso ci sono infiniti piani che le contengono.

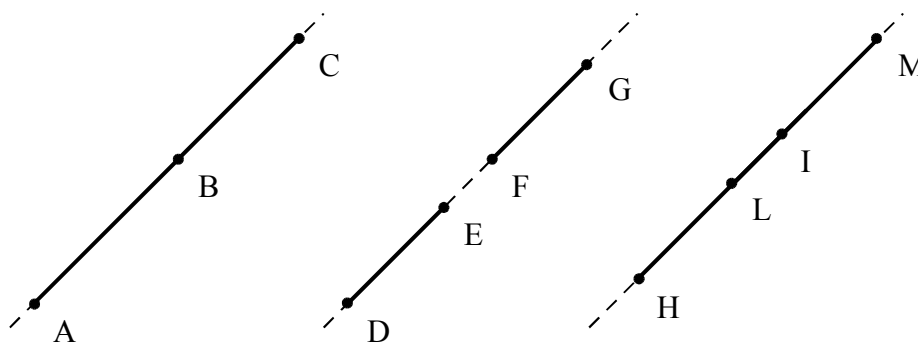
DEFINIZIONE. L'insieme di tutte le rette di un piano che passano per uno stesso punto è detto **fascio proprio di rette**, il punto in comune a tutte le rette si dice centro del fascio.

P

Prendendo due punti su una retta, A e B, la retta resta divisa in tre parti: la semiretta di origine A che non contiene B, la parte costituita dai punti compresi tra A e B e la semiretta di origine B che non contiene A.

DEFINIZIONE. Si chiama **segmento** AB l'insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno tra A e B. I punti A e B si dicono **estremi** del segmento.

I punti A e B formano le due semirette, *r* e *s*, e il segmento AB.

Un segmento viene indicato con le due lettere maiuscole dei suoi estremi.
Due segmenti nel piano possono trovarsi in diverse posizioni reciproche. Alcune di esse hanno un interesse per la geometria.

DEFINIZIONE. Due segmenti si dicono **consecutivi** se hanno in comune soltanto un estremo.

I segmenti AB e BC sono consecutivi perché hanno in comune solo il punto B che è un estremo di entrambi; DE e FG non sono consecutivi perché hanno in comune solo il punto F ma esso non è estremo del segmento DE; HI e LM non sono consecutivi perché non hanno nessun punto in comune.

DEFINIZIONE. Due segmenti si dicono **adiacenti** se sono consecutivi ed appartengono alla stessa retta.

I segmenti AB e BC sono adiacenti perché hanno in comune solo l'estremo B e giacciono sulla stessa retta; i segmenti DE e FG non sono adiacenti; i segmenti HI e LM non sono adiacenti.

41 Disegna una retta *a* e una retta *b* che si incontrano in un punto *X*, disegna anche una retta *c* che incontra la *a* in *Y* e la *b* in *Z*. Elenca tutte le semirette e tutti i segmenti che si vengono a formare.

42 Disegna due rette *a* e *b* parallele tra di loro; disegna poi la retta c che interseca la *a* in *A* e la *b* in *B*; disegna poi la retta *d* che interseca *a* in *A* e *b* in *C*. Quali segmenti si vengono a formare?

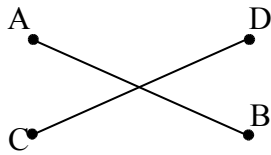
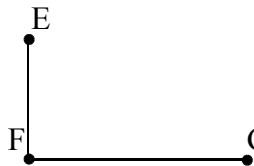
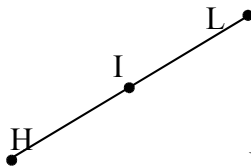
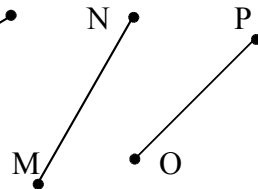
43 Rappresenta graficamente ciascuna delle seguenti situazioni:

a. $A \in r$ e $B \in r$, $B \in s$ e $C \in s$, $A \in t$ e $C \in t$

b. $AB \subset r$, $CD \subset r$, $AB \cap CD = AD$. $AB \cup CD = \ldots\ldots ?$

c. $AB \subset r$, $CD \subset r$, $AB \cap CD = \emptyset$. $AB \cup CD = \ldots\ldots ?$

d. $AB \subset r$, $CD \subset s$, $r // s$, $P \notin r \cup s$

44 Attribuisci il nome corretto a ciascuna coppia di segmenti: adiacenti, incidenti, disgiunti, consecutivi:

AB e CD sono .... EF e FG sono .... HI e IL sono .... MN e OP sono ....

45 Su una retta r disegna i punti A e B, sapendo che A precede B, disegna i punti C e D sapendo che D è compreso tra A e B e C segue B. Indica tutti i segmenti che si vengono a formare.

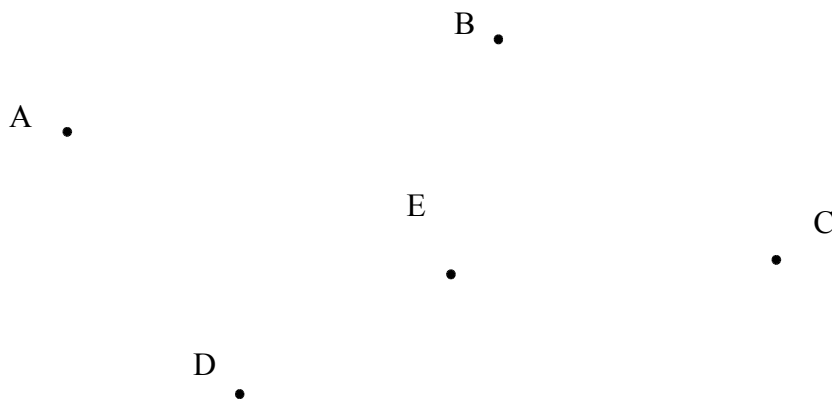
46 Dati cinque punti nel piano, in modo che a tre a tre non siano allineati, quante rette passanti per due di questi punti è possibile tracciare? Completa il disegno. Sai esprimere il legame generale tra il numero N di punti e il numero di rette che si possono tracciare?

B

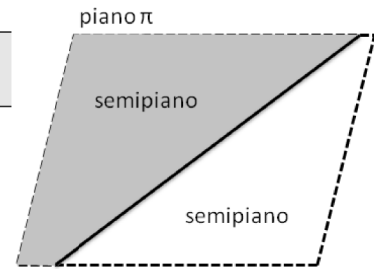
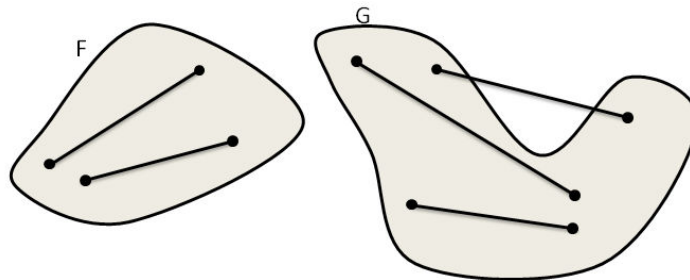
A

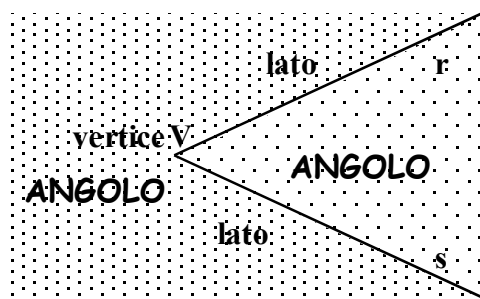
E

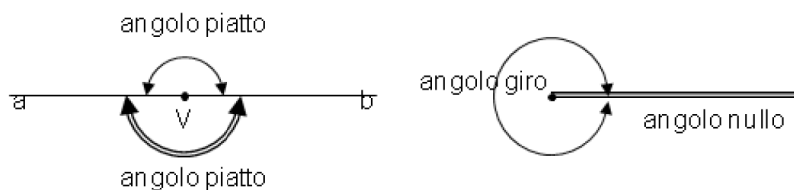
C

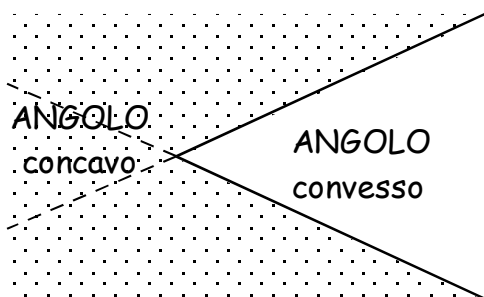
D

Semipiani e angoli

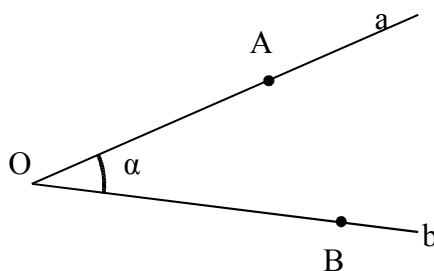
DEFINIZIONE. Si dice **semipiano** di origine la retta r la figura formata dalla retta r e da una delle due parti in cui essa divide il piano.

In un piano π, una qualsiasi retta $r \subset \pi$ dà origine a due semipiani distinti, che si dicono semipiani opposti.

DEFINIZIONE. Una figura si dice **convessa** se, considerati due suoi qualsiasi punti, il segmento che li unisce è contenuto nella figura. Si dice **concava** se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce non è interamente contenuto nella figura.

La figura F è convessa, per qualsiasi coppia di punti interni a F il segmento che li unisce è interamente nella figura; la figura G è concava perché unendo i punti P e Q si ha un segmento che cade in parte esternamente alla figura.

DEFINIZIONE. Si dice **angolo** ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette si dicono **lati** dell'angolo; l'origine comune alle due semirette si dice **vertice** dell'angolo.

Le semirette r e s, aventi l'origine V comune individuano due regioni del piano dette angolo.

DEFINIZIONE
Un angolo si dice **angolo piatto** se i suoi lati sono uno il prolungamento dell'altro.
Un angolo si dice **angolo nullo** se è costituito solo da due semirette sovrapposte.
Si dice **angolo giro** l'angolo che ha per lati due semirette sovrapposte e che contiene tutti i punti del piano.

L'angolo $\widehat{ab}$ a sinistra è piatto, gli angoli a destra sono rispettivamente un angolo giro e un angolo nullo.

DEFINIZIONE. Un angolo, i cui lati non appartengono alla stessa retta, si dice **concavo** se contiene i prolungamenti dei lati, se non li contiene si dice **convesso**.

L'angolo concavo è quello punteggiato in quanto contiene i prolungamenti dei lati.

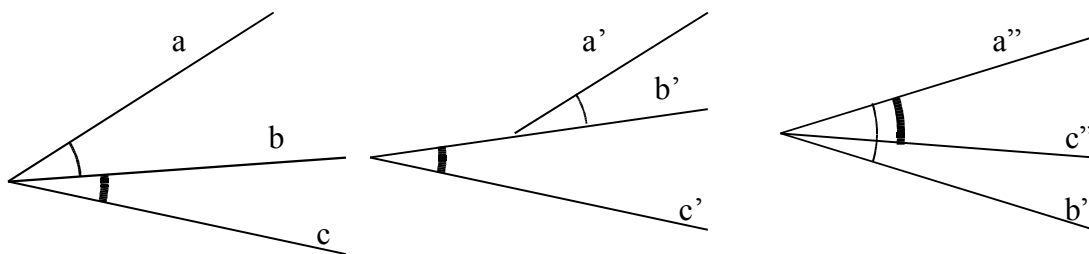
Quando si disegna un angolo è utile, oltre a disegnare le semirette e l'origine, indicare con un archetto quale dei due angoli si intende considerare.

Per indicare che l'angolo da considerare è quello convesso e non quello concavo si è usato un archetto in prossimità del vertice O.

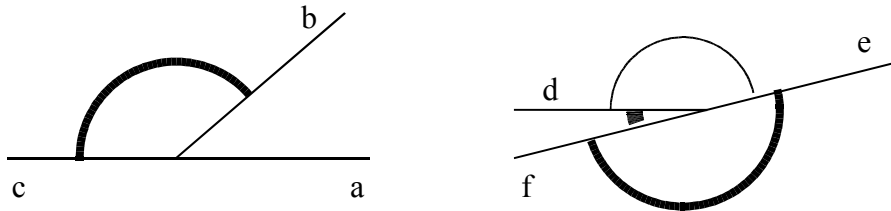
Per indicare gli angoli si usano diverse convenzioni:

- $\widehat{ab}$ se si conoscono i nomi delle semirette che ne costituiscono i lati;
- $A\widehat{O}B$ se si conoscono i nomi del vertice e di due punti sui lati;
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ una lettera greca per indicare direttamente l'angolo.

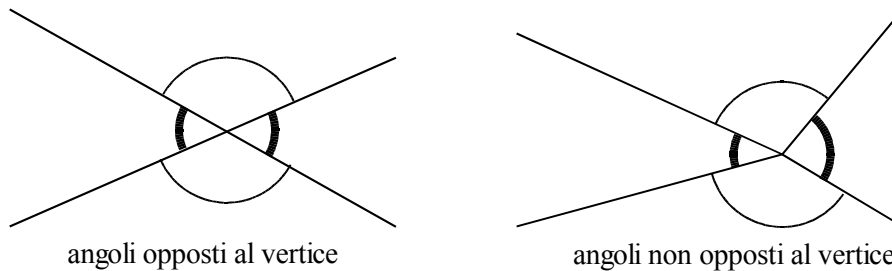
I primi due modi di indicare l'angolo non individuano con chiarezza di quale dei due angoli si tratta. Solitamente si intende l'angolo convesso, quando si vuole indicare l'angolo concavo bisogna dirlo esplicitamente.

Anche per gli angoli si danno le definizioni di angoli consecutivi e angoli adiacenti, in parte simili a quelle date per i segmenti.

DEFINIZIONE. Due angoli si dicono **angoli consecutivi** se hanno il vertice e un lato comune e giacciono da parte opposta rispetto al lato comune.

Nella figura gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono consecutivi perché hanno il vertice e il lato b in comune; $\widehat{a'b'}$ e $\widehat{b'c'}$ non sono consecutivi perché non hanno il vertice in comune; $\widehat{a''b''}$ e $\widehat{a''c''}$ non sono consecutivi perché non giacciono da parti opposte rispetto al lato in comune a".

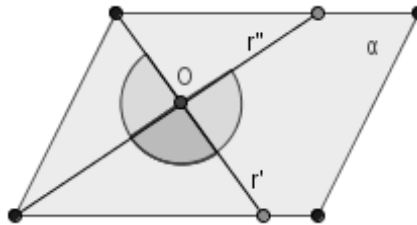
DEFINIZIONE. Due angoli si dicono **angoli adiacenti** se sono consecutivi e se i lati non comuni giacciono sulla stessa retta.

I due angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono adiacenti, perché sono consecutivi e i lati *a* e *c* sono uno il prolungamento dell'altro; i due angoli $\widehat{de}$ ed $\widehat{ef}$ non sono adiacenti in quanto *d* non è il prolungamento di *f*; gli angoli $\widehat{de}$ e $\widehat{df}$ sono adiacenti in quanto *f* è il prolungamento di *e*.

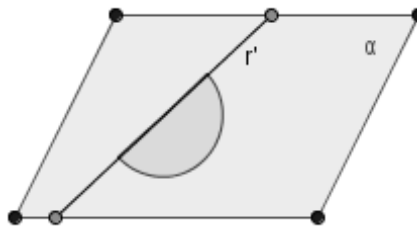
DEFINIZIONE. Due angoli convessi si dicono **angoli opposti al vertice** se i lati del primo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

angoli opposti al vertice | angoli non opposti al vertice

Gli angoli formati dalle semirette a sinistra sono opposti al vertice; gli angoli formati dalle semirette a destra non lo sono.

Posizioni reciproche di semipiani

Siano π' e π" due semipiani di un piano α, aventi per origine rispettivamente le rette r' e r". La loro unione e la loro intersezione danno luogo a figure diverse tra loro a seconda dei vari casi possibili.

1° caso r' ed r" sono incidenti in un punto O. Allora l'intersezione dei due semipiani (π'∩π") è un angolo convesso di vertice O, mentre la loro unione (π'∪π") è un angolo concavo di vertice O.

Le due semirette r' e r", origini dei semipiani π' e π" sono incidenti; in questo caso l'unione dei due semipiani è l'angolo concavo di colore grigio chiaro, la loro intersezione è l'angolo convesso di colore grigio scuro.

2° caso r' ed r" sono coincidenti, π' e π" anch'essi coincidenti, cioè perfettamente sovrapposti. In questo caso particolare l'intersezione e l'unione dei due semipiani coincidono con gli semipiani (π'∩π" = π'∪π" = π' = π"). Osserva che un semipiano è anche un angolo piatto.

I due semipiani hanno la stessa retta di origine e sono anche coincidenti: la loro unione e la loro intersezione coincide con i semipiani stessi e formano lo stesso angolo piatto.

3° caso r' ed r" sono coincidenti, con π' e π" distinti, e dunque opposti. In tal caso particolare l'intersezione dei due semipiani coincide con la retta origine in comune (π'∩π" = r' = r") e l'unione di essi coincide con l'intero piano (π'∪π" = α). Notiamo che un piano è anche un angolo giro.

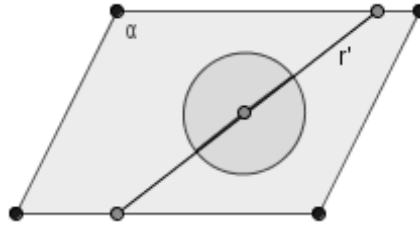



Figura 33. I due semipiani hanno la stessa retta di origine e si trovano da parti opposte: la loro unione coincide con l'intero piano (angolo giro).

4° caso r' ed r" sono parallele e distinte, cioè non hanno punti in comune, ed inoltre π' non contiene r" e π" non contiene r'. In tal caso i due semipiani non hanno punti in comune, cioè la loro intersezione è vuota ($\pi' \cap \pi'' = \emptyset$) mentre la loro unione è una parte ("sconnessa") del piano α costituita da tutti i punti di α tranne la parte (convessa) delimitata dalle due semirette r' ed r".

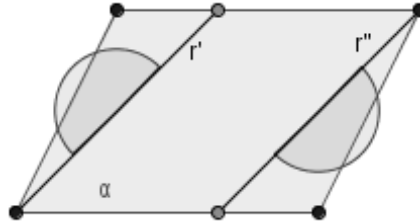



Figura 34. Le rette di origine sono parallele e distinte, i semipiani non hanno punti in comune, la loro unione è costituita dall'unione dei due angoli piatti indicati con un archetto grigio.

5° caso r' ed r" sono parallele e distinte, cioè non hanno punti in comune, ed inoltre π' contiene r" e π" non contiene r' [o viceversa]. In tal caso l'intersezione dei due semipiani coincide con uno dei due semipiani e la loro unione coincide con l'altro semipiano ($\pi' \cap \pi'' = \pi''$ e $\pi' \cup \pi'' = \pi'$) [o, rispettivamente, $\pi' \cap \pi'' = \pi'$ e $\pi' \cup \pi'' = \pi''$].

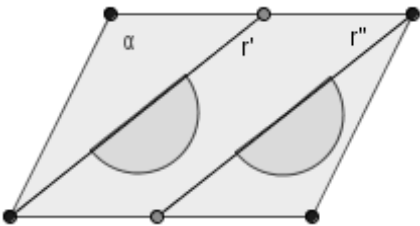



Figura 35. Le rette di origine sono parallele e distinte, uno dei due semipiani contiene l'altro; la loro unione è l'angolo piatto con lati sulla retta r', la loro intersezione è l'angolo piatto con lati sulla retta r"

6° caso r' ed r" sono parallele e distinte, cioè non hanno punti in comune, ed inoltre π' contiene r" e π" contiene r'. In tal caso l'unione dei due semipiani è l'intero piano ($\pi' \cup \pi'' = \alpha$), mentre l'intersezione di essi è la parte (convessa) di α delimitata dalle due semirette r' ed r". Tale intersezione ($\pi' \cap \pi''$) prende il nome di **striscia di piano** delimitata dalle rette r' ed r" che sono dette *lati* della striscia.

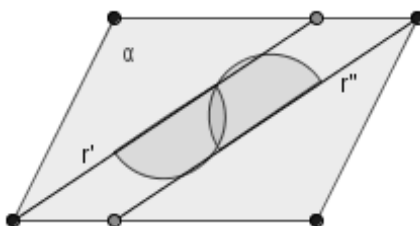



Figura 36. Le rette di origine sono parallele e distinte, ognuno dei due semipiani contiene l'altra retta, la loro unione è formata da tutto il piano, la loro intersezione forma una striscia di piano, delimitata dalle rette r' e r", dette lati della striscia.

47 Vero o falso?

[A] Per un punto passa una sola retta V F
[B] Per due punti passa una sola retta V F
[C] Per tre punti passano almeno tre rette V F
[D] Due punti distinti del piano individuano sempre un segmento V F
[E] Due rette distinte del piano hanno al più un punto in comune V F
[F] Tre punti distinti del piano individuano almeno tre rette V F
[G] Due semirette distinte del piano che hanno la stessa origine sono opposte V F
[H] Alcuni segmenti consecutivi non sono adiacenti V F
[I] Due angoli che hanno il vertice in comune sono consecutivi V F
[J] Per un punto del piano passano solo due rette V F
[K] Due segmenti posti sulla stessa retta sono adiacenti V F
[L] Due segmenti consecutivi hanno in comune un estremo e nessun altro punto V F

48 Due segmenti si dicono adiacenti se:

[A] appartengono alla stessa retta
[B] sono consecutivi ma non appartengono alla stessa retta
[C] non sono consecutivi e appartengono alla stessa retta
[D] sono consecutivi e appartengono alla stessa retta
[E] appartengono alla stessa retta e hanno gli estremi coincidenti

49 Un angolo è convesso se:

[A] è adiacente ad un altro angolo
[B] i suoi lati sono rette incidenti
[C] contiene il prolungamento dei suoi lati
[D] è consecutivo ad un altro angolo
[E] non contiene il prolungamento dei suoi lati

50 Due angoli si dicono opposti al vertice se:

[A] sono sullo stesso piano
[B] sono uno concavo e uno convesso
[C] se hanno il vertice in comune
[D] se i lati dell'uno sono contenuti nell'altro
[E] se i lati dell'uno sono il prolungamento dei lati dell'altro

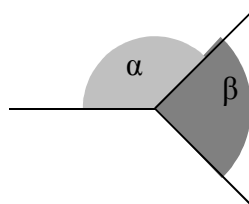
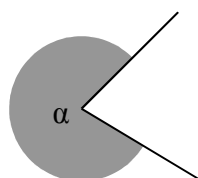
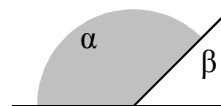
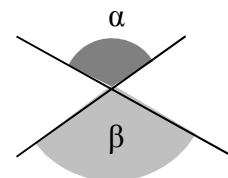
51 Quanti angoli individuano tre semirette aventi la stessa origine? Fai un disegno.

Rispondi a voce

52 Dai la definizione di angolo.

53 Qual è la differenza tra angolo piatto e angolo nullo? Fai riferimento alle definizioni e non al fatto che il primo misura 360° e il secondo 0°.

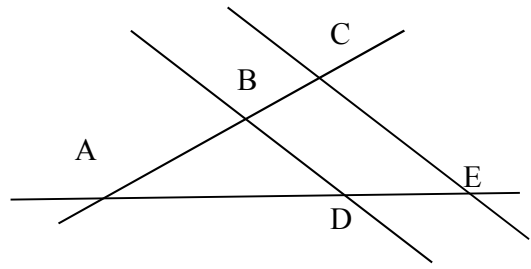
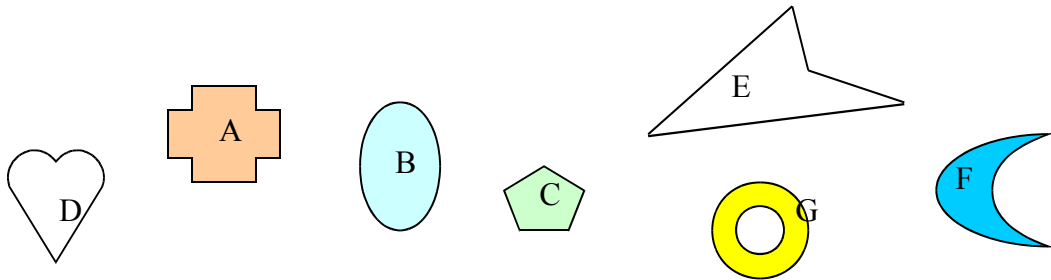
54 Qual è la differenza tra angoli consecutivi e angoli adiacenti?

55 Per ciascuna figura scrivi di che angolo si tratta relativamente agli angoli colorati in grigio, scegliendo i termini tra: angolo concavo, angoli adiacenti, angoli consecutivi, angoli opposti al vertice.

α e β sono _____________ α è _____________ α e β sono _____________ α e β sono _____________

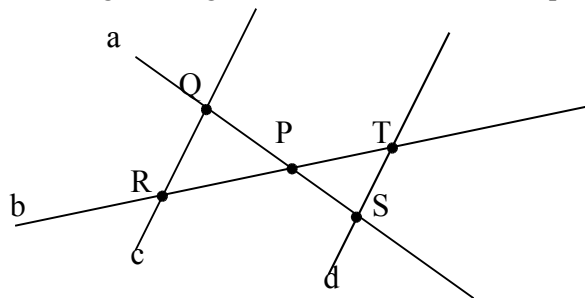
56 Rappresenta graficamente ciascuna delle seguenti situazioni:

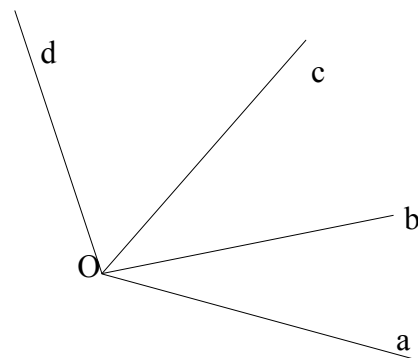
a. $A\widehat{O}B \cup A\widehat{O}C = A\widehat{O}B$
b. $A\widehat{O}B \cap A\widehat{O}C = A\widehat{O}B$
c. $A\widehat{O}B \cap C\widehat{O}D = C\widehat{O}B$ e $A\widehat{O}B \cup C\widehat{O}D = A\widehat{O}B$

57 Nella figura a fianco indica

a. Una coppia di segmenti consecutivi … …
b. Una coppia di segmenti adiacenti … …
c. Una coppia di rette incidenti … …
d. Una coppia di rette parallele … …
e. Una coppia di angoli consecutivi … … … …
f. Una coppia di angoli adiacenti … … … …
g. Una coppia di angoli opposti al vertice … … … ….
h. Un angolo concavo … …
i. Un angolo convesso … …

58 Sono convesse le figure

[A] A, B, C, G [B] D, C, B, F [C] B, C, D [D] B, C [E] D, E, F, G

59 Scrivi per esteso in italiano quanto è indicato in simboli e rappresenta con un disegno tutti i casi possibili: $(P \in r) \wedge (P \in s) \wedge (Q \in r)$.

60 Descrivi la costruzione della seguente figura, dove le rette c e d sono parallele

61 Siano a, b, c, d quattro semirette aventi l'origine in comune O disposte in ordine antiorario come in figura. Individua aiutandoti con il disegno quali sono gli angoli che si ottengono dalle seguenti operazioni:

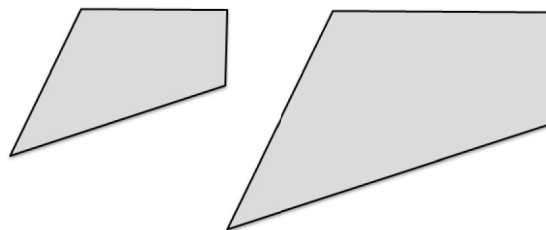
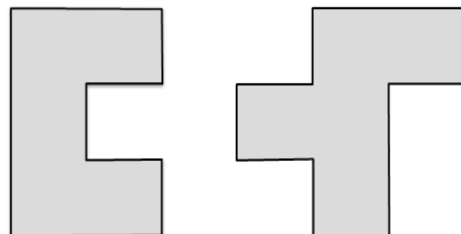
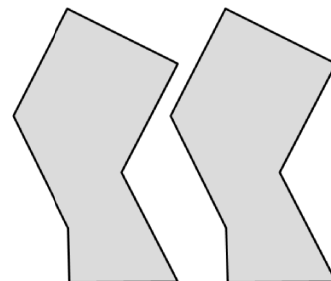
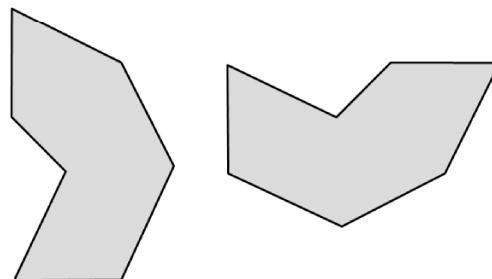
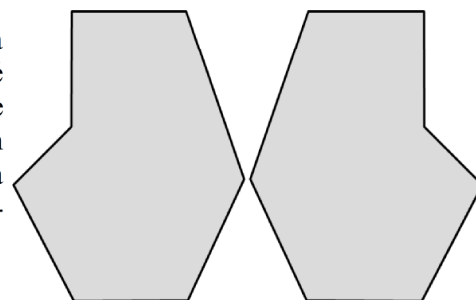
a. $a\widehat{O}d \cap d\widehat{O}b$
b. $d\widehat{O}c \cup c\widehat{O}b$
c. $c\widehat{O}b \cup c\widehat{O}a$
d. $a\widehat{O}d \cap d\widehat{O}b$
e. $c\widehat{O}a \cap d\widehat{O}b$

62 Se P è centro di un fascio di rette e A è un punto dello stesso piano, è vero che "Nel fascio di centro P esiste una retta passante per A"?

63 Motiva la verità o la falsità della proposizione: "Tutte le rette incidenti formano 2 coppie di angoli opposti al vertice".

►5. Confronto e operazioni fra segmenti e angoli

Premessa intuitiva

Nel linguaggio comune usiamo la parola ‘uguale’ con un significato generico, spesso per indicare due oggetti che si assomigliano: due macchine uguali, due orologi uguali, … In aritmetica e in algebra usiamo la parola ‘uguale’ per indicare oggetti matematici perfettamente uguali. Per esempio, 2=2, ogni numero infatti è uguale solo a se stesso. Scriviamo anche 3+2=5, per dire che il numero che si ottiene dalla somma di 3 e 2 è proprio il numero 5. Nei polinomi si enuncia il principio di identità dei polinomi, in base al quale due polinomi sono uguali se si possono scrivere formalmente allo stesso modo.
In geometria, usiamo il termine ‘uguale’ per indicare due figure coincidenti nella forma e nella posizione. In altre parole due figure sono uguali solo se sono esattamente la stessa figura. Tuttavia, in geometria siamo interessati a studiare soprattutto figure che senza essere del tutto identiche hanno delle caratteristiche in comune. Vediamo prima degli esempi intuitivi e successivamente tratteremo lo stesso tema ma in modo formalmente corretto.

Le figure a lato hanno la stessa forma ma una è più grande dell’altra, la seconda infatti è stata ottenuta dalla prima raddoppiando i lati: in geometria si dicono *simili*.

Queste due altre figure non hanno la stessa forma, non si somigliano affatto, però le loro superfici hanno la stessa estensione, in quanto sono costituite dallo stesso numero di quadratini: in geometria si dicono *equivalenti*.

Le figure a lato hanno la stessa forma e le stesse dimensioni ma sono in posizioni differenti, è però possibile spostare una sull’altra senza deformarle e farle coincidere. Usualmente le chiamiamo figure uguali, in geometria si dicono *congruenti*.

Le due figure a lato hanno la stessa forma e le stesse dimensioni, per rendersene conto occorre ruotare per esempio la seconda figura in senso antiorario (si può ruotare anche in senso orario ma di un angolo maggiore) e poi trascinarla sulla prima per sovrapporla. Anche queste figure sono dette uguali nel linguaggio comune, in geometria si dicono *congruenti*.

Le due figure a lato hanno stessa forma e stesse dimensioni, tuttavia non si riesce a trasportare l’una sull’altra muovendole nel piano, né trascinandole, né ruotandole, occorre ribaltarne una facendola uscire dal piano; le due figure sono una l’immagine speculare dell’altra. In geometria, se due figure piane sono tali che, spostandone una senza deformarla, possono essere poste in maniera tale che una sia l’immagine speculare dell’altra, diciamo che sono *inversamente congruenti*.

Osserviamo i due segmenti AB e CD rappresentati nella figura che segue. I due segmenti sono sovrapponibili, e quindi congruenti, infatti basta fare scorrere il segmento CD lungo la retta fino a far coincidere C con A, il punto D coinciderà con B. Tuttavia, se portiamo D a coincidere con A dobbiamo poi ribaltare il segmento CD in modo che A coincida con D e B coincida con C.

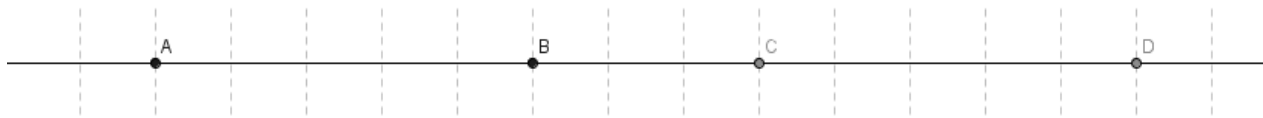



Figura 42. I segmenti AB e CD sono direttamente congruenti in quanto si può far coincidere A con C e B con D semplicemente facendo scorrere lungo la retta un segmento sull'altro. Se invece vogliamo far coincidere A con D e B con C occorre ribaltare, uscendo fuori dalla retta, uno dei due segmenti.

Osserva che per ribaltare una figura occorre una dimensione in più, precisamente se si tratta di due figure piane occorre avere la terza dimensione per ribaltare una figura piana, se siamo su una retta occorre la seconda dimensione per ribaltare un segmento.
Per renderci conto di quanto accade con le figure solide, possiamo pensare ai palmi delle nostre mani che con buona approssimazione si possono considerare inversamente congruenti: esse possono essere giunte, ma non sovrapposte nel senso in cui si parla a proposito delle figure piane. Infatti non è possibile vedere le proprie mani, entrambe dal dorso o entrambe dal palmo, con le dita rivolte verso l'alto, in modo che in ciascuna di esse il pollice sia a sinistra oppure a destra.

La congruenza

Secondo il punto di vista del matematico tedesco Felix Klein (1848-1925), la geometria è lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto a certe trasformazioni. Nello studio della geometria euclidea, quella che tratteremo in questo Tema, ci occupiamo delle proprietà delle figure geometriche invarianti rispetto ai movimenti rigidi, cioè rispetto a quei movimenti che conservano forma e dimensioni delle figure. Queste trasformazioni vengono anche dette *isometrie* (si intuisce dalla radice etimologica che si parla di *stessa misura*): significa che viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti di due figure congruenti in modo da "mantenere" le distanze.

DEFINIZIONE. Diciamo che due figure F e G sono **congruenti** quando esiste un movimento rigido che le sovrappone perfettamente. In simboli $F \cong G$.

Nella Premessa a questo paragrafo abbiamo dato un'idea intuitiva e sperimentale del concetto di congruenza. Ma per esplicitarlo matematicamente dobbiamo utilizzare gli assiomi di congruenza di Hilbert che abbiamo enunciato nel Capitolo 1 Paragrafo 2. Ne riportiamo alcuni per comodità del lettore.

Assiomi di congruenza

III. *Assioma del trasporto di un segmento*. Se A, B sono due punti di una retta a e A' è un punto sulla stessa retta o su un'altra retta a', si può sempre trovare un punto B' sulla retta a o su a', da una data parte rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente al segmento A'B'.

Questo assioma afferma che, fissato un punto A' su una retta a', è sempre possibile trasportare un qualunque segmento AB in modo che l'estremo A coincida con A' e il segmento stia sulla retta a'.

IV. La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva, cioè se A′B′ e A″B″ sono congruenti ad AB, allora A′B′ è congruente a A″B″.

La relazione di congruenza tra segmenti è allora un relazione di equivalenza, in quanto gode delle proprietà:

a. riflessiva: ogni segmento è congruente a se stesso;
b. simmetrica: se AB è congruente a A'B' allora anche A'B' è congruente ad AB;
c. transitiva: se AB è congruente ad A'B' e A'B' è congruente ad A"B", allora AB è congruente ad A"B".

DEFINIZIONE. Si dice **lunghezza di un segmento** la classe di equivalenza dei segmenti congruenti tra di loro, cioè l'insieme di tutti i segmenti che sono congruenti tra di loro.

V. *Assioma del trasporto di un angolo*. Dati un angolo $A\widehat{B}C$ ed una semiretta B'C' , esistono e sono uniche due semirette B'D e B'E, tali che l'angolo $D\widehat{B'}C'$ è congruente all'angolo $A\widehat{B}C$ e l'angolo $E\widehat{B'}C'$ è congruente all'angolo $A\widehat{B}C$.

Questo assioma ci garantisce che è sempre possibile trasportare un angolo $A\widehat{B}C$ su una qualsiasi semiretta *s*, facendo coincidere il vertice dell'angolo con l'origine della semiretta e un lato dell'angolo con la semiretta *s*.

VI. La relazione di congruenza tra angoli è transitiva, cioè se $A'\widehat{B'}C'$ e $A''\widehat{B''}C''$ sono congruenti ad $A\widehat{B}C$, allora $A'\widehat{B'}C'\equiv A''\widehat{B''}C''$.

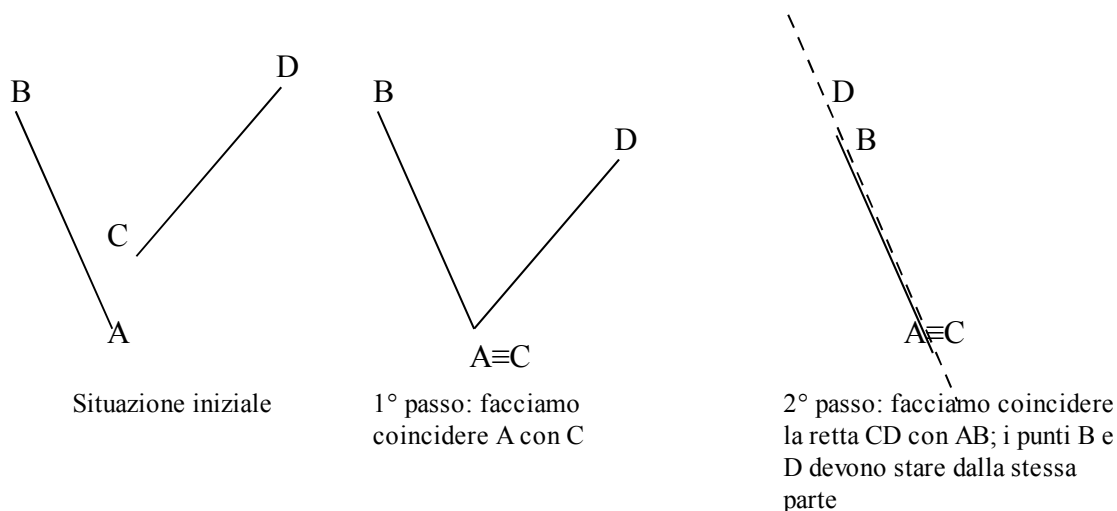
Quindi anche la relazione di congruenza tra gli angoli è una relazione di equivalenza, gode cioè delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva.

DEFINIZIONE. Si dice **ampiezza di un angolo** la classe di equivalenza degli angoli congruenti tra di loro, cioè l'insieme di tutti gli angoli che sono congruenti tra di loro.

Aggiungiamo che:
- Tutte le rette sono fra loro congruenti;
- Tutte le semirette sono fra loro congruenti;
- Tutti i piani sono fra loro congruenti;

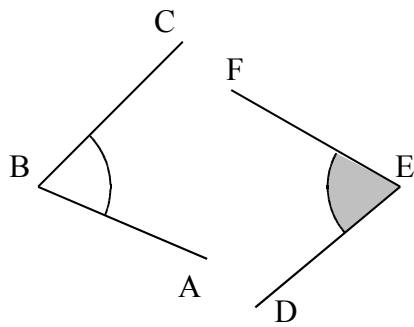
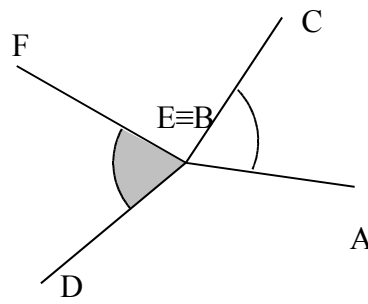
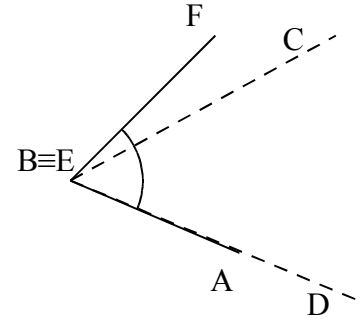
Confronto di segmenti

Per confrontare l'altezza di due persone e vedere chi è più alto, facciamo mettere affiancate le due persone in modo che i piedi stiano allo stesso livello, dopo di che confrontiamo l'estremità della testa: è più alto chi ha l'estremità della testa più in alto. Un procedimento analogo si fa per confrontare due segmenti.

Per confrontare due segmenti AB e CD, facciamo in modo che con un movimento rigido gli estremi A e C coincidano, con una rotazione intorno al punto A facciamo in modo che coincidano anche le rette AB e CD e che gli estremi B e D stiano dalla stessa parte rispetto ad A e C.

Confronto di due segmenti

A questo punto possono verificarsi tre situazioni possibili:
- B cade dopo l'estremo D, allora diciamo che AB è maggiore di CD, scriviamo AB>CD;
- B cade esattamente su D, allora i due segmenti sono congruenti;
- B cade tra C e D, allora diciamo che AB è minore di CD, scriviamo AB<CD.

Confronto di angoli

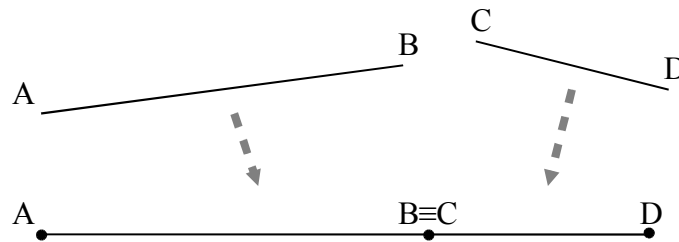
Per confrontare due angoli $A\widehat{B}C$ e $D\widehat{E}F$, portiamo con un movimento rigido il vertice B sul vertice E, con una rotazione portiamo a coincidere la semiretta BA con la semiretta ED, in modo che le altre due semirette, BC e EF, stiano dalla stessa parte rispetto a BA.

Situazione iniziale

1° passo: facciamo coincidere i vertici B ed E.

2° passo: facciamo coincidere le semirette BA e ED

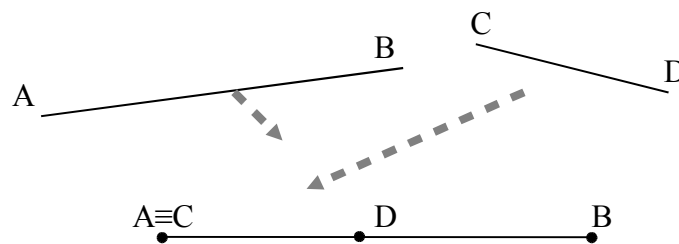
Confronti di due angoli

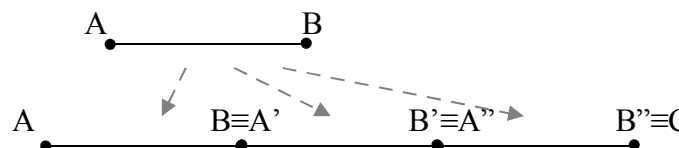
A questo punto si possono avere tre situazioni distinte:

- Il lato EF cade internamente all'angolo $A\widehat{B}C$, diciamo che $A\widehat{B}C > D\widehat{E}F$;
- Il lato EF cade esattamente su BC, i due angoli sono congruenti;
- Il lato EF cade esternamente all'angolo $A\widehat{B}C$, diciamo che $A\widehat{B}C < D\widehat{E}F$.

Operazioni con i segmenti

Somma di due segmenti. La somma di due segmenti AB e CD è il segmento AD che si ottiene trasportando con un movimento rigido il segmento CD in modo che AB e CD siano adiacenti, con l'estremo B coincidente con C. Scriviamo AB + CD = AD , usando l'usuale simbolo di addizione.

Il segmento AD è la somma dei segmenti AB e CD.

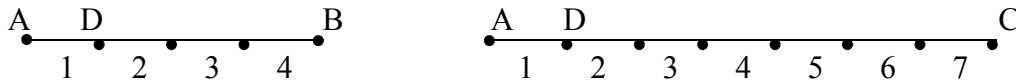
Differenza di due segmenti. La differenza di due segmenti AB e CD, con AB>CD, è il segmento DB che si ottiene sovrapponendo AB e CD facendo coincidere l'estremo A con l'estremo C. Scriviamo AB – CD = DB

Il segmento DB è la differenza tra i segmenti AB e CD.

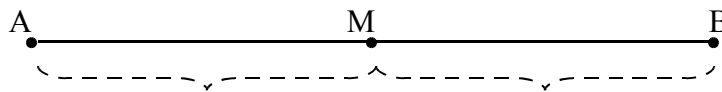
Multiplo di un segmento. Il multiplo secondo m, numero naturale diverso da zero, di un segmento AB è il segmento AC che si ottiene sommando m volte il segmento AB a se stesso.

In figura $AC \cong 3\,AB$

Se m=0, il multiplo secondo m di qualsiasi segmento AB è il segmento nullo, ove per segmento nullo intendiamo un qualsiasi segmento in cui gli estremi coincidono, cioè il segmento ridotto al solo punto A.

Sottomultiplo di un segmento. Il sottomultiplo secondo n, numero naturale diverso da 0, di un segmento *AB* è un segmento *AC* tale che $AB = n \cdot AC$. Si può anche scrivere $AC = \frac{1}{n} AB$.

In generale il segmento $AC = \frac{m}{n} AB$ si ottiene dividendo *AB* in *n* parti uguali ottenendo il segmento *AD* e poi sommando *m* segmenti congruenti ad *AD*.

A D C
1 2 3 4 5 6 7

Il segmento AC è congruente a $\frac{7}{4}$ di AB, cioè $AC = \frac{7}{4} AB$, infatti AB è stato diviso in 4 parti uguali e AC è costituito da 7 di queste parti.

Punto medio. Dato un segmento AB esiste uno e uno solo punto M che lo divide in due parti congruenti tra di loro, questo punto si dice punto medio del segmento.

M è il punto medio del segmento AB in quanto $AM \cong MB$.

DEFINIZIONE. Si chiama **punto medio di un segmento** il punto interno al segmento che lo divide in due parti congruenti.

Proprietà
- somme di segmenti a due a due congruenti sono congruenti;
- differenze di segmenti a due a due congruenti sono congruenti.

Esempio

■ Siano AB e CD due segmenti congruenti appartenenti a una retta r che non abbiano punti in comune. Dimostra che $AD - BC = 2\text{AB}$

Disponiamo i punti A, B, C, D su una retta r come in figura.

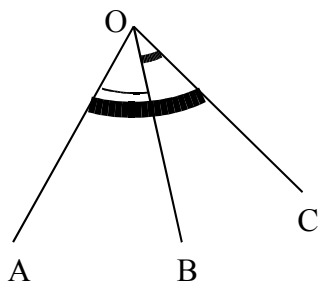
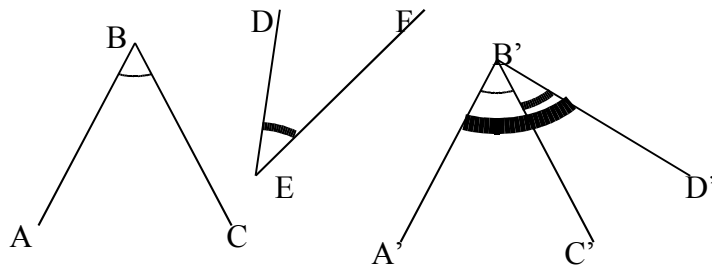
A B C D

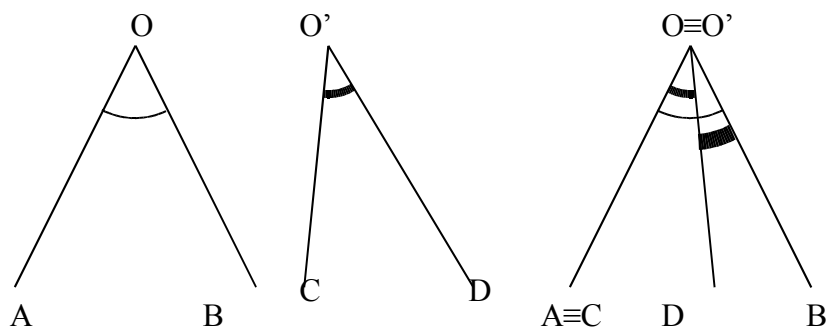
Si ha che: $AD = AB + BC + CD$,

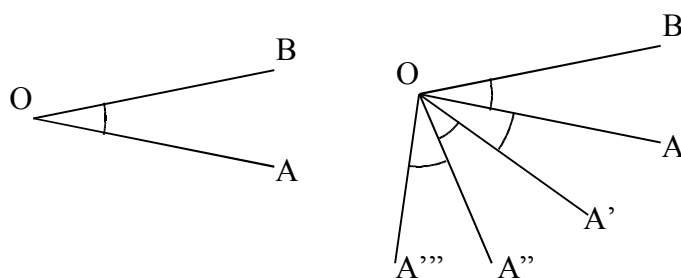
Allora $AD - BC = AB + BC + CD - BC = AB + CD$

Poiché $AB \cong CD$ allora $AB + CD \cong AB + AB = 2 \cdot AB$

Operazioni con gli angoli

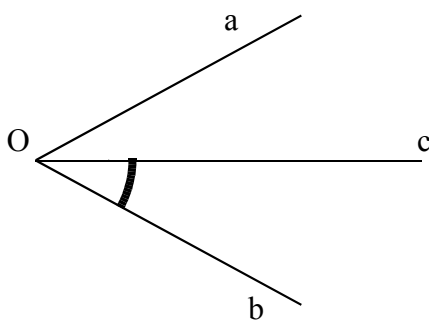
Somma di angoli. La somma di due angoli consecutivi $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ è l'angolo $A\hat{O}C$. Per sommare due angoli che non sono consecutivi, per esempio $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$, si costruiscono due angoli consecutivi tra di loro, uno congruente a $A\hat{B}C$, l'altro congruente a $D\hat{E}F$, la somma di questi due angoli consecutivi si dice anche somma dei due angoli.

Somma di angoli consecutivi:

Somma di angoli non consecutivi

Differenza di angoli. Si dice differenza di due angoli, di cui il primo è maggiore o congruente al secondo, l'angolo che addizionato al secondo dà per somma il primo.

Angolo differenza $A\widehat{O}B - C\widehat{O'}D \cong D\widehat{O}B$.

Se i due angoli sono congruenti la loro differenza è l'angolo nullo.
Multiplo di un angolo. Dato un angolo $A\widehat{O}B$ e un numero *n* naturale non nullo, il multiplo di $A\widehat{O}B$ secondo *n* (si può scrivere $n \cdot A\widehat{O}B$) è l'angolo che si ottiene sommando n angoli congruenti a $A\widehat{O}B$.
Se n=0, il multiplo secondo n di qualsiasi angolo $A\widehat{O}B$ è l'angolo nullo.

L'angolo $B\widehat{O}A$ è il quadruplo di $A\widehat{O}B$, cioè $B\widehat{O}A''' \cong 4 \cdot B\widehat{O}A$

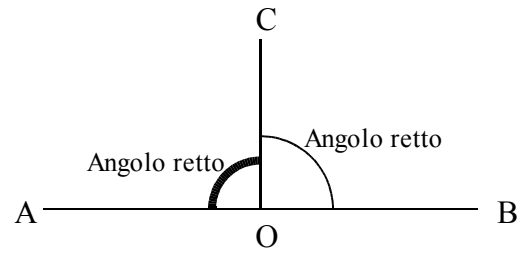
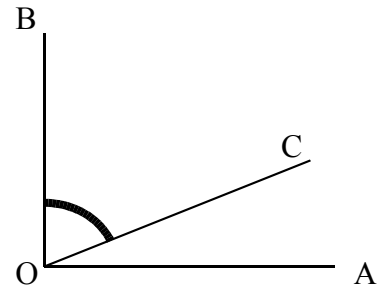
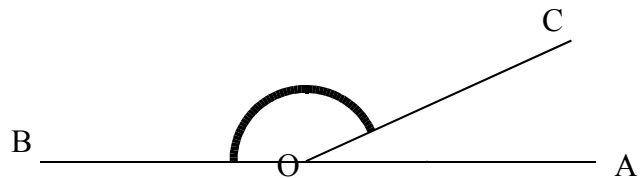
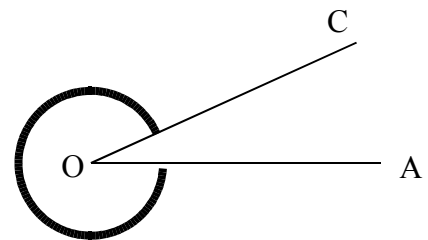
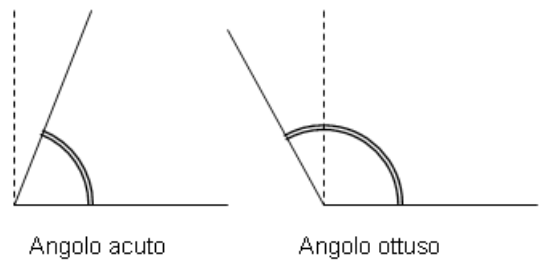
Sottomultiplo di un angolo. Il sottomultiplo secondo n, naturale non nullo, di un angolo $A\widehat{O}B$ è un angolo $A\widehat{O}C$ tale che $A\widehat{O}B = n \cdot A\widehat{O}C$. Si può anche scrivere $A\widehat{O}C = \frac{1}{n} \cdot A\widehat{O}B$.

In generale un angolo $A\widehat{O}C = \frac{m}{n} \cdot A\widehat{O}B$ si ottiene dividendo $A\widehat{O}B$ in *n* parti uguali ottenendo l'angolo $A\widehat{O}D$, l'angolo $A\widehat{O}C$ si ottiene sommando *m* angoli $A\widehat{O}D$.

DEFINIZIONE. Si dice **bisettrice** di un angolo la semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e divide l'angolo in due angoli congruenti.

la semiretta c di origine O è la bisettrice dell'angolo $a\widehat{O}b$, sono congruenti gli angoli $a\widehat{O}c$ e $c\widehat{O}b$.

Angoli particolari

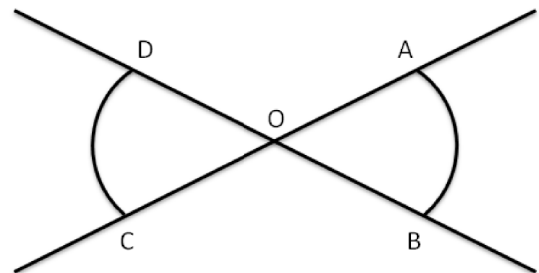
Possiamo ora dare dei nomi ai seguenti angoli particolari.

- Si dice **angolo retto** la metà di un angolo piatto.

- Due angoli si dicono **angoli complementari** se la loro somma è un angolo retto.

- Due angoli si dicono **angoli supplementari** se la loro somma è un angolo piatto.

- Due angoli si dicono **angoli esplementari** se la loro somma è un angolo giro.

- Un angolo si dice **angolo acuto** se è minore di un angolo retto.
- Un angolo convesso si dice **angolo ottuso** se è maggiore di un angolo retto.

TEOREMA. **Angoli opposti al vertice sono congruenti.**

<u>Ipotesi</u>: $C\widehat{O}D$ è opposto al vertice di $B\widehat{O}A$

<u>Tesi</u>: $C\widehat{O}D \cong B\widehat{O}A$

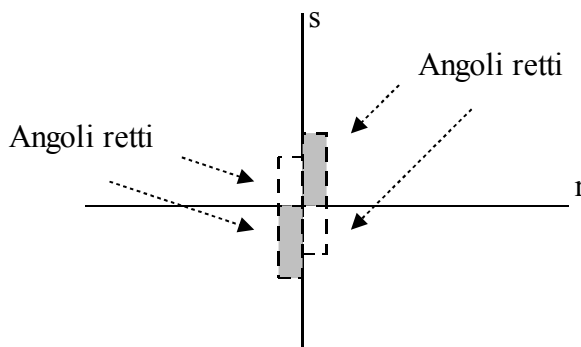
<u>Dimostrazione</u>:

Gli angoli $A\widehat{O}B$ e $A\widehat{O}D$ sono angoli adiacenti dato che hanno un lato in comune e gli altri due lati sono l'uno il prolungamento dell'altro. Ma anche gli angoli $A\widehat{O}B$ e $A\widehat{O}D$ sono angoli adiacenti per lo stesso motivo. Quindi gli angoli $D\widehat{O}C$ e $A\widehat{O}B$ sono adiacenti allo stesso angolo $A\widehat{O}D$. Indicando con π l'angolo piatto si ha: $D\widehat{O}C+A\widehat{O}D=\pi$ da cui $D\widehat{O}C=\pi-A\widehat{O}D$. Analogamente $D\widehat{O}C+A\widehat{O}D=\pi$ da cui $A\widehat{O}B=\pi-A\widehat{O}D$. Ne consegue che $D\widehat{O}C\cong A\widehat{O}B$ e cioè la tesi.

Prova tu a dimostrare il seguente teorema:

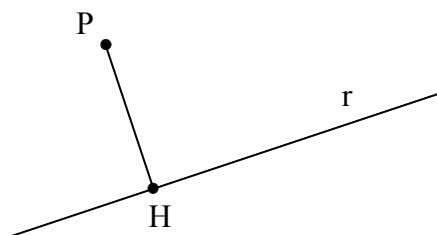
TEOREMA. **Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti.**

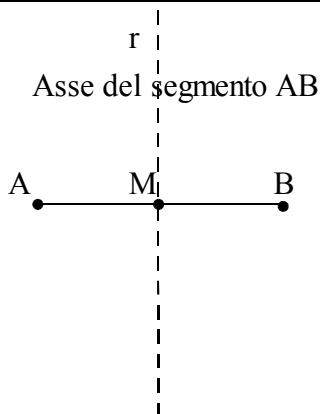
Dopo aver realizzato il disegno, esplicita ipotesi e tesi. Segui poi il ragionamento del teorema precedente: se due angolo sono supplementari la loro somma è un angolo piatto...

Perpendicolari e altre definizioni

DEFINIZIONE. Due rette si dicono **perpendicolari** se sono incidenti e formano quattro angoli retti.

Le rette r e s sono perpendicolari, incontrandosi formano quattro angoli retti.

Per indicare che le due rette r e s sono perpendicolari si usa il simbolo $r \perp s$.

DEFINIZIONE. Si dice **distanza di un punto da una retta** il segmento di perpendicolare condotta dal punto alla retta.

Il segmento *PH*, appartenente alla perpendicolare a *r* passante per *P*, è la distanza di *P* dalla retta *r*.

DEFINIZIONE. Si dice **asse di un segmento** la retta perpendicolare al segmento e passante per il punto medio del segmento.

La retta r è l'asse del segmento AB in quanto è perpendicolare alla retta per AB e passa per il punto medio di AB.

DEFINIZIONE. Due punti si dicono **punti simmetrici rispetto a una retta** se la retta è asse del segmento che ha per estremi i due punti.

Nella figura precedente, i punti A e B sono simmetrici rispetto alla retta *r*.

Esercizi

64 Completa la frase:

Quando si parla di angolo acuto o di angolo ottuso, bisogna saper eseguire l'operazione di .... tra angoli e aver dato la definizione di ..……….............

65 Due angoli sono complementari e uno è doppio dell'altro. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

[A] uno è retto e l'altro è piatto
[B] uno è 1/3 dell'angolo retto e l'altro i 2/3 dell'angolo retto
[C] uno è 1/3 dell'angolo retto e l'altro 1/6 dell'angolo retto
[D] uno è 1/2 dell'angolo retto e l'altro è retto
[E] uno è 2/3 dell'angolo retto e l'altro i 4/6 dell'angolo retto

66 Siano α e β due angoli consecutivi esplementari e siano a e b le loro bisettrici. L'angolo tra a e b è

[A] Piatto [B] Retto [C] Nullo [D] Non si può sapere

67 Se α e β sono due angoli di vertice O, consecutivi e complementari e a e b le loro bisettrici, allora per l'angolo $a\widehat{O}b$ si può dire che:

[A] è uguale all'angolo retto
[B] è la terza parte di un angolo retto
[C] è la metà di un angolo retto
[D] è la quarta parte di un angolo retto
[E] non è possibile determinarne l'ampiezza

68 Le bisettrici di due angoli adiacenti:

[A] sono parallele
[B] sono lati di un angolo retto
[C] sono lati di un angolo concavo
[D] coincidono
[E] sono semirette opposte

69 Due angoli si dicono complementari quando:

[A] sono consecutivi
[B] sono angoli opposti al vertice
[C] la loro somma è un angolo retto
[D] ciascuno di essi è acuto
[E] ciascuno è la metà di un angolo retto

70 Dati due segmenti adiacenti AB e BC tali che $AB \cong \frac{1}{3} BC$, allora per $AC = AB + BC$ si può dire:

[A] $AC \cong \frac{1}{4} BC$
[B] $AC \cong 3\, BC$
[C] $AC \cong 2\, BC$
[D] $AC \cong \frac{1}{2} BC$
[E] $AC \cong \frac{4}{3} BC$

71 Due segmenti AB e CD appartengono alla stessa retta e hanno lo stesso punto medio. Si può affermare:

[A] $AB \cong CD$
[B] $AC \cong CD$
[C] $DB \cong DC$
[D] $AC \cong BD$
[E] $AC \cong AB$

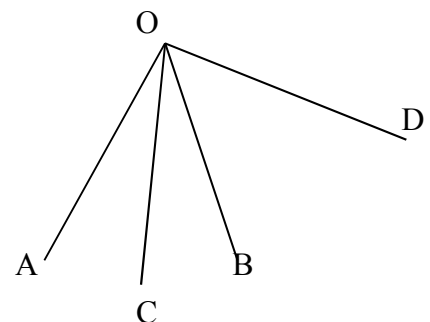
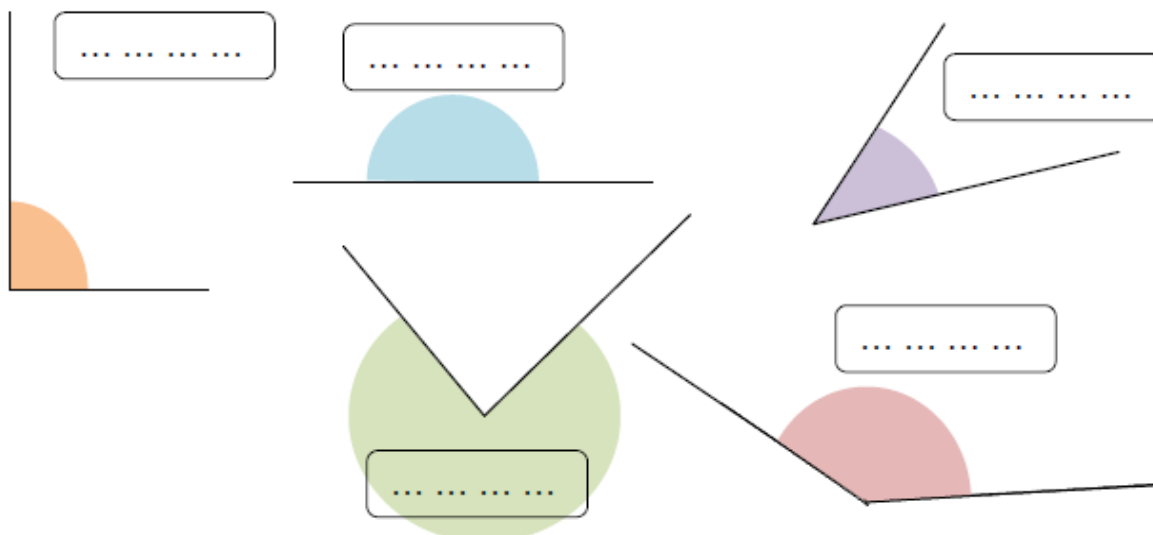
72 Per ciascuna delle affermazioni seguenti, dire se è vera o falsa, e spiegare perché

a) l'angolo retto è la metà dell'angolo giro V F
b) ogni angolo convesso ha due bisettrici V F
c) due angoli che hanno in comune il vertice sono consecutivi V F
d) un angolo ottuso è maggiore di qualunque angolo acuto V F
e) sommando due angoli acuti si può ottenere un angolo piatto V F

73 Tre semirette *a, b, c* uscenti da uno stesso punto dividono il piano in tre angoli congruenti. Dopo aver rappresentato le semirette, traccia la semiretta b1 opposta di b. Allora:

[A] b1 è perpendicolare alla semiretta a
[B] b1 è bisettrice dell'angolo formato da a e c
[C] b1 è perpendicolare alla semiretta c

74 Dato l'angolo acuto $A\widehat{O}B$, sia OC la sua bisettrice. Sia poi OD una semiretta esterna all'angolo come in figura, quale relazione è vera?

[A] $C\widehat{OB} \cong \frac{1}{2}(D\widehat{O}A - D\widehat{O}B)$
[B] $C\widehat{OB} = (A\widehat{O}D - A\widehat{O}B)$
[C] $C\widehat{OB} = (B\widehat{O}D - C\widehat{O}B)$
[D] $C\widehat{OB} \cong \frac{1}{2}(D\widehat{O}A + D\widehat{O}B)$

75 Individua tra i seguenti angoli quello piatto, retto, acuto, ottuso, concavo, scrivi nelle etichette il relativo nome. Per ciascuno di essi traccia la bisettrice.

76 Vero/Falso

a) Sommando due angoli acuti si ottiene sempre un angolo acuto V F
b) Sommando due angoli piatti si ottiene un angolo giro V F
c) Sommando un angolo acuto e uno retto si ottiene un angolo ottuso V F
d) Sommando due angoli retti si ottiene un angolo giro V F
e) Sommando un angolo piatto e un angolo acuto si ottiene un angolo concavo V F
f) Sommando due angoli convessi si ottiene sempre un angolo convesso V F
g) Sommando un angolo retto e un angolo piatto si ottiene un angolo giro V F

77 Individua l'angolo

a) La differenza tra un angolo piatto è un angolo retto è un angolo … … … … … …
b) La differenza tra un angolo giro e un angolo piatto è un angolo … … … … … …
c) La differenza tra un angolo acuto e un angolo retto è un angolo … … … … … …
d) La differenza tra un angolo giro e un angolo piatto è un angolo … … … … … …
e) Il doppio di un angolo piatto è un angolo … … … … … …
f) Il doppio di un angolo retto è un angolo … … … … … …

78 Spiega perché se due angoli sono complementari i loro doppi sono supplementari.

79 Verifica, aiutandoti con un disegno, che se $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ e $\widehat{C} < \widehat{D}$ allora $\widehat{A} + \widehat{C} < \widehat{B} + \widehat{D}$.

80 Dati quattro segmenti AB>BC>CD>DE. Verifica, aiutandoti con dei disegni, che:

a) AB-CD > BC-CD
b) AB+DE>BC+CD

81 Un angolo α è retto e un angolo β è la sesta parte di un angolo piatto. A quale frazione di angolo retto corrisponde la somma α+β?

82 Disegnare due angoli consecutivi α e β, disegnale l'angolo γ adiacente a α non contenente β e l'angolo δ adiacente a β non contenente α. Gli angoli γ+δ e α+β sono:

[A] complementari [B] supplementari [C] opposti al vertice [D] esplementari

83 Su una semiretta di origine A segna il segmento AB, il segmento BC=3AB e il segmento $CD \cong AB$, i punti sono consecutivi secondo l'ordine alfabetico. Secondo quale numero frazionario AD e multiplo di BC?

84 Su una semiretta di origine O si hanno i segmenti OA e OB con OB>OA. Se M è il punto medio di OA e N è il punto medio di OB, quale delle due seguenti relazioni è vera?

[A] $MN \cong \frac{1}{2}(OB-OA)$ [B] $MN \cong \frac{1}{2}(OB+OA)$

85 Su una semiretta di origine O si prendono i punti ABC con OC>OB>OA. Sia M il punto medio di OA e N il punto medio di BC. Quale delle seguenti relazioni è vera?

[A] $MN \cong \frac{1}{2}(OB+OA)$ [B] $MN \cong \frac{1}{2}(OA+BC)$

[C] $MN \cong \frac{1}{2}(OC+AB)$

86 Su una retta, i punti A, B, C, D si susseguono secondo l'ordine alfabetico. Se AB è congruente a CD i punti medi di BC e AD coincidono? Sai spiegare perché?

87 Siano AB e CD due segmenti congruenti disposti su una retta r e non aventi alcun punto in comune. Dimostra che AC è congruente a BD.

88 Siano AB e CD due segmenti congruenti disposti su una retta r, non aventi alcun punto in comune e in modo che AB preceda CD. Dimostra che il punto medio di BC è anche punto medio di AD.

89 Siano AB e CD due segmenti congruenti adiacenti, siano M e N i rispettivi punti medi, dimostra che MN è congruente a CD.

90 Siano AB e CD due segmenti congruenti adiacenti tali che $BC \cong 3 \cdot AB$, siano M e N i rispettivi punti medi, dimostra che $MN \cong \frac{2}{3} \cdot BC$.

91 Siano AB e BC due segmenti adiacenti non necessariamente congruenti, sia M il punto medio di AC ed N il punto medio di BC, dimostra che $MN \cong \frac{1}{2} \cdot AB$.

92* Siano AB e BC due segmenti adiacenti e congruenti; siano M e N i punti medi rispettivamente di AB e BC. Dimostrare che $AB \cong MN$.

93* Siano AB e BC due segmenti adiacenti tali che AB < BC, e siano M e N i loro rispettivi punti medi. Dimostrare che AB < MN e che MN < BC.

94 In un piano gli angoli $A\widehat{O}C$ e $C\widehat{O}D$ sono adiacenti. Sia OF bisettrice di $A\widehat{O}C$ e OE bisettrice di $C\widehat{O}D$. Spiega perché $F\widehat{O}E$ è retto.

95 Quattro semirette con origine nello stesso punto dividono un angolo giro in quattro angoli α, β, γ, δ disposti in senso antiorario secondo l'ordine alfabetico. Si sa che α è congruente a γ e β è congruente a δ. Dimostra che ci sono alcune semirette opposte, quali sono?

96 Quando due angoli sono complementari? Disegna un angolo convesso e i suoi complementari consecutivi, spiega come hai costruito gli angoli complementari. Spiega perché i complementari dello stesso angolo sono congruenti.

97 Sia M il punto medio del segmento AB e sia P un punto compreso tra M e B. Che relazione esiste tra MP e la differenza AP-BP? Per aiutarti costruisci il punto Q tale che $QM \cong MP$.

98 Sia $A\widehat{O}B$ un angolo qualunque e OC la sua bisettrice. Sia OD una semiretta esterna all'angolo $A\widehat{O}B$. Che relazione c'è tra $C\widehat{O}D$ e $A\widehat{O}D+B\widehat{O}D$? Per aiutarti traccia la bisettrice di $B\widehat{O}D$.

99* Siano α e β due angoli adiacenti. Dimostrare che le loro bisettrici sono lati di un angolo retto.

100* Siano r e s due rette incidenti e siano α, β e γ, δ le due coppie di angoli opposti al vertice individuate da r e s. Dimostrare che le rette sostegno delle bisettrici delle due coppie di angoli sono perpendicolari.

101* Disegnare un angolo $A\hat{O}B$ e la sua bisettrice OC, quindi disegnare un secondo angolo $B\hat{O}D$, consecutivo al primo, e la sua bisettrice OE. Dimostrare che $A\hat{O}D \cong 2C \cong E$.

102* Dimostrare che le bisettrici di due angoli opposti al vertice hanno lo stesso sostegno, cioè sono semirette opposte.

103* Disegnare un angolo concavo $b\hat{O}a$ e la sua bisettrice d. Dimostrare che la semiretta opposta a d è la bisettrice dell'angolo convesso $a\hat{O}b$.

104* Disegnare gli angoli consecutivi $a\hat{O}b$ e $b\hat{O}c$, quindi le loro rispettive bisettrici d ed e. Dimostrare che se gli angoli $d\hat{O}b$ e $b\hat{O}e$ sono complementari, allora gli angoli $a\hat{O}b$ e $b\hat{O}c$ sono adiacenti.

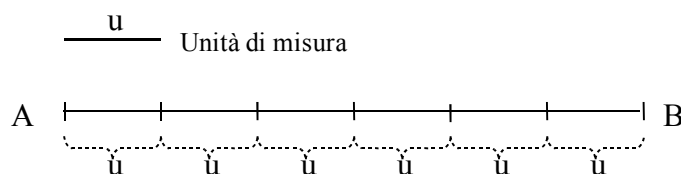
105* Disegnare due angoli consecutivi $a\hat{V}b$ e $b\hat{V}c$ e le loro bisettrici d ed e. Supposto che le bisettrici siano perpendicolari, dimostrare che, presi due punti qualunque rispettivamente sulle semirette a e c, essi sono allineati con V .

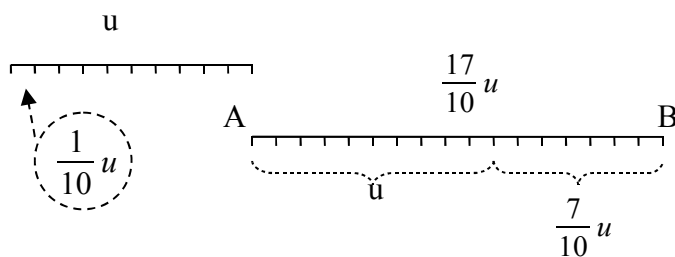
Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 112; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da
http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

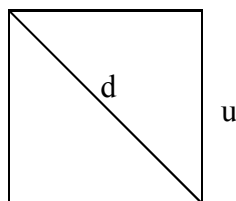
►6. La misura

Misura di segmenti

Riprendiamo alcune definizioni sui segmenti:
Si dice **segmento** di estremi A e B (o brevemente segmento AB) l'insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno tra A e B.
Due segmenti AB e CD si dicono **congruenti** se esiste un movimento rigido che porta a coincidere A con C e B con D, oppure A con D e B con C. Ricordiamo che se esiste un movimento rigido che porta a coincidere A con C e B con D allora esiste anche un movimento rigido che porta a coincidere A con D e B con C, e viceversa. È altresì vero che, anche nel caso in cui i due segmenti appartengano alla stessa retta, uno dei due movimenti comporta il "ribaltamento" di uno dei due segmenti che gli fa occupare posizioni al di fuori della retta che lo contiene.
Si dice **lunghezza** di un segmento AB l'insieme di tutti i segmenti congruenti ad AB.
Si dice **distanza** tra due punti A e B il segmento AB di estremi A e B.
Diamo ora una definizione particolarmente importante per l'applicazione del calcolo numerico alla geometria: la definizione di misura. Ricordiamo che la nozione di misura è alla base delle applicazioni del calcolo matematico non solo alla geometria ma anche alla fisica e alla tecnologia in generale. Il processo di misurazione è analogo a tutti i campi di applicazioni: si tratta di trovare un modo per assegnare a una grandezza un numero. Questo numero si ottiene confrontando due grandezze dello stesso tipo. Per esempio, per misurare la massa di un oggetto si confronta la sua massa con quella di un oggetto campione, di solito un oggetto di 1 kg. Per misurare un segmento AB si confronta questo segmento con un altro segmento scelto come unità di misura, di solito indicato con *u*.
Nel confronto tra il segmento AB e il segmento *u*, possono verificarsi i tre casi seguenti:

1. Il segmento AB è multiplo del segmento *u* secondo il numero naturale n, precisamente $AB \cong n \cdot u$. In questo caso la misura di AB rispetto a *u* è il numero naturale n. Si scrive $\overline{AB} \cong n\, u$

Il segmento AB misura 6*u*, in quanto $AB \cong 6 \cdot u$.

2. Il segmento AB non è un multiplo intero di *u* ma è un multiplo di un sottomultiplo di *u*, precisamente $AB \cong n \cdot \frac{u}{m} = \frac{n}{m} u$. In questo caso la misura di AB rispetto a *u* è il numero razionale $\frac{n}{m}$. Si scrive $\overline{AB} = \frac{n}{m} u$.

Il segmento AB è congruente a 17 volte il segmento $\frac{1}{10} u$, quindi AB misura $\frac{17}{10} u$.

3. Il segmento AB non è un multiplo né di *u* né di nessun sottomultiplo di *u*. In questo caso si dice che AB e *u* sono **incommensurabili**, nei casi precedenti si dice che sono commensurabili. Anche in questo caso è possibile attribuire ad AB un numero che ne esprime la misura rispetto a *u*, si tratta però di un numero irrazionale. La complessità dell'argomento richiede alcune conoscenze più avanzate di matematica, pertanto la tematica della misura delle grandezze incommensurabili sarà approfondita nel seguito. Qui ci accontentiamo di accennare al caso storicamente più noto di segmenti incommensurabili: la diagonale di un quadrato misurata rispetto al suo lato.

Prendendo come unità di misura il lato di un quadrato la sua diagonale è incommensurabile con il lato stesso. Applicando il teorema di Pitagora, ricorderai infatti che $d=\sqrt{2}\,u$ e che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.

Proponiamo una dimostrazione dell'irrazionalità del numero $\sqrt{2}$ utilizzando il metodo della dimostrazione per assurdo.

TEOREMA. **$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.**

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, cioè che sia possibile scrivere $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N},\ n\neq 0$. Allora, per definizione di radice quadrata, si avrebbe $2=\frac{m^2}{n^2}$, da cui $2\cdot n^2=m^2$. I due membri dovrebbero quindi rappresentare lo stesso numero naturale (il teorema fondamentale dell'Aritmetica assicura l'unicità della scomposizione in fattori primi). Essendo 2 un numero primo, dovrebbe comparire come fattore sia al primo sia al secondo membro lo stesso numero di volte. Inoltre m^2 ed n^2 o sono dispari e quindi non contengono 2 come fattore, oppure se contengono il fattore 2, lo contengono un numero pari di volte (vediamo qualche esempio $24=2^3\cdot 3 \rightarrow 24^2=2^6\cdot 3^2;\ \ 20=2^2\cdot 5 \rightarrow 20^2=2^4\cdot 5^2$). Ma $2\cdot n^2$ contiene il fattore 2 un numero dispari di volte, mentre m^2 lo contiene un numero pari di volte. Pertanto l'uguaglianza $2\cdot n^2=m^2$ non può essere mai verificata; l'assurdo dipende dall'aver supposto $\sqrt{2}$ razionale. C.V.D.

Un altro esempio di numero irrazionale, e di conseguenza di due "lunghezze" incommensurabili, è π, che rappresenta il rapporto tra la misura della lunghezza 'rettificata' di una qualsiasi circonferenza e la misura della lunghezza del suo diametro.

In generale, dato un segmento AB e un segmento *u*, preso come unità di misura, esiste sempre un numero reale positivo che esprime la misura di AB rispetto a *u*. Questo numero è unico, ossia ogni segmento ha una sola misura. Viceversa, dato un qualsiasi numero *r* reale positivo e un segmento *u*, preso come unità di misura, è sempre possibile costruire un segmento che misura esattamente $r\cdot u$ rispetto all'unità di misura fissata.

Osservazioni

- Se due segmenti sono congruenti, le loro misure, rispetto alla stessa unità di misura, sono uguali: $AB\cong CD \rightarrow \overline{AB}=\overline{CD}$.
- La misura di un segmento AB somma di due segmenti CD e EF $(AB\cong CD+EF)$ è uguale alla somma delle misure di CD e EF: $AB\cong CD+EF \rightarrow \overline{AB}=\overline{CD}+\overline{EF}$.
- La misura di un segmento multiplo secondo n del segmento AB è uguale al prodotto di *n* per la misura di AB: $CD=n\cdot AB \rightarrow \overline{CD}=n\cdot\overline{AB}$.
- Definito il **rapporto tra due segmenti** come il quoziente tra le loro misure $\left(\frac{CD}{AB}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\right)$, rispetto alla stessa unità di misura, si ha che il rapporto non dipende dall'unità di misura usata per misurare i segmenti, cioè il numero che si ottiene è sempre lo stesso indipendentemente dall'unità scelta per misurare.

Possiamo pertanto parlare di *misura della lunghezza di un segmento* e darne la seguente definizione generale.

DEFINIZIONE. Dato un segmento AB e un segmento u, preso come unità di misura, si dice **misura della lunghezza del segmento** AB il numero reale positivo *r* per il quale $AB=r\cdot u$.

Nella realtà fisica per misurare la lunghezza degli oggetti reali (l'altezza di una persona, la lunghezza di un banco, di una stanza, di un terreno…) si usa come unità di misura il metro, indicato con *m*, con i suoi multipli (decametro, ettometro, chilometro…) e i suoi sottomultipli (decimetro, centimetro, millimetro…). Anche nella geometria, che tratta di segmenti ideali non riscontrabili perfettamente nella realtà, si usa come unità di misura un segmento di un metro.

Riassumendo, ricordiamo simboli e nozioni che riguardano due punti A e B.

- I **due punti** presi singolarmente, che con notazione insiemistica si indica con $\{A, B\}$.
- La **retta** passante per i due punti, che si indica con il simbolo AB oppure $r(A, B)$.
- La **semiretta** di origine A e passante per B, che si indica con il simbolo AB oppure $r(A, B)$.
- Il **segmento** di estremi A e B, che si indica con il simbolo AB .
- La **distanza** tra i punti A e B, cioè il segmento AB, che si indica con il simbolo AB oppure $d(A, B)$.
- La **lunghezza** del segmento AB, cioè l'insieme di tutti i segmenti congruenti ad AB, che si indica con il simbolo $\overline{AB}$.
- La **misura della lunghezza** del segmento AB rispetto a una fissata unità di misura, che si indica con il simbolo $\overline{AB}$.
- La **misura della distanza** tra i punti A e B, che corrisponde alla misura del segmento AB e si indica con il simbolo $\overline{AB}$.

Tutte queste distinzioni sono importanti dal punto di vista dell'organizzazione teorica delle geometria, tuttavia dal punto di vista applicativo e della quotidianità del linguaggio geometrico possono risultare pedanti e noiose, spesso si usano espressione più generiche, finché si riescono ad evitare possibili malintesi. Sebbene a rigore si dovrebbe dire "La misura della lunghezza del segmento AB rispetto al centimetro è 12" molto spesso si usa dire "Il segmento AB è lungo 12cm" oppure "AB misura 12cm" o ancora "La distanza AB è lunga 12cm" o più semplicemente "Un segmento di 12cm" ecc.

106 Due segmenti adiacenti AB e BC misurano rispettivamente 12cm e 15cm, calcola la misura della distanza tra i loro punti medi M e N.

107 Dati due segmenti AB e CD, con $\overline{AB}=5\,cm$ e $\overline{CD}=6\,cm$, sottrai dalla loro somma la loro differenza e verifica che si ottiene un segmento congruente al doppio del segmento minore.

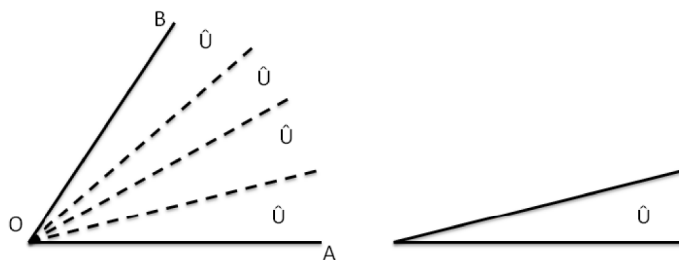
108 Il triplo di un segmento AB uguaglia il quadruplo di un segmento CD; determinare il rapporto tra AB e CD.

109 Due segmenti AP e PB sono tali che $\frac{AP}{PB}=\frac{4}{7}$; determina la misura del segmento $AB=AP+PB$, sapendo che AP misura 16cm.

110 I segmenti OA, AB e BC sono adiacenti; M ed N sono rispettivamente i punti medi di OA e di BC. Se $\overline{OA}=4\,m$, $\overline{AB}=7\ m$ e $\overline{MN}=14\ m$, quanto misura BC?

111 Su una semiretta di origine O sono disposti tre punti A, B, C tali che $OB=4\,AB$, $\overline{OB}=16\,cm$, BC supera AB di 2 cm. Determina la lunghezza di BC.

Misura degli angoli

Il procedimento che si usa per misurare gli angoli è del tutto analogo a quello usato per misurare i segmenti. Si fissa una unità di misura, cioè un angolo $\widehat{U}$, e si confronta l'angolo da misurare con l'angolo $\widehat{U}$. Come risultato si avrà un numero reale positivo che chiamiamo misura dell'ampiezza dell'angolo.

L'angolo $A\widehat{O}B$ è quattro volte l'angolo $\widehat{U}$, pertanto $A\widehat{O}B=4\cdot\widehat{U}$

Per misurare gli angoli l'unità di misura comunemente usata è la trecentosessantesima parte dell'angolo giro, quest'angolo si chiama **grado**, e si indica con un cerchietto posto in alto °. Si ha quindi, usando come unità di misura il grado, che:

- l'angolo retto misura 90 gradi, si scrive 90°;
- l'angolo piatto misura 180°
- l'angolo giro misura 360°.

I sottomultipli del grado sono il primo che è la sessantesima parte di un grado (in simboli 1°=60') e il secondo che è la sessantesima parte del primo (in simboli 1'=60") e quindi la tremilaseicentesima parte del grado (in simboli 1°=3600").

Esempio

- *Calcola la misura in gradi del supplementare dell'angolo che misura 35° 15' 40".*

Occorre eseguire la sottrazione $180°-35°15'40''$. Per eseguire praticamente questa sottrazione si trasforma 1° in 60' e 1' in 60", precisamente si scrive 180° come 179°59'60", pertanto:

179°59'60"-
35°15'40"=
144°44'20"

Quindi $180°-35°15'40''=144°44'20''$.

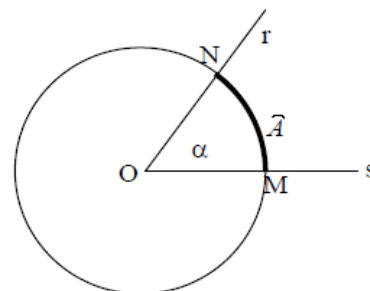
Il sistema di misura degli angoli che abbiamo illustrato prende il nome di **sistema sessagesimale**. Spesso, però, per praticità, anziché usare i primi, i secondi e i decimi di secondo, si usano i decimi di grado: in questo caso il sistema si dice **sistema sessadecimale**.

In base a quanto abbiamo illustrato, vediamo brevemente come si passa da un sistema all'altro.

$$10°42'23'',2=\left(10+\frac{42}{60}+\frac{23{,}2}{3600}\right)=10°,706\bar{4} \quad ,$$

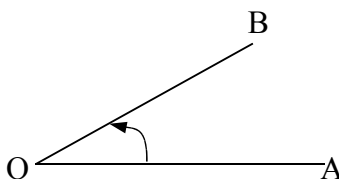
$$50°,748=50°+(0{,}748\cdot 60)'=50°+44',88=50°+44'+(0{,}88\cdot 60)''=50°44'52'',8 \quad .$$

I sistemi sessagesimale e sessadecimale non sono gli unici usati per le misure degli angoli.
Osservando i tasti di una calcolatrice scientifica, si può vedere che ci sono tre sistemi principali le cui unità sono rispettivamente il grado sessagesimale (DEG), il grado centesimale (GRAD) e il radiante (RAD).
Il grado centesimale è importante per gli strumenti tecnici. Si può passare dal grado sessagesimale al grado centesimale e viceversa con una semplice proporzione, sapendo che l'angolo retto, pari a 90°, corrisponde a 100 gradi centesimali (in simboli 100^g).

Il radiante è utile nello studio della trigoniometria e dell'analisi matematica. L'angolo di misura 1 radiante (in simboli 1 *rad*) è congruente ad un angolo con vertice nel centro di una circonferenza e tale che la misura dell'arco da esso individuato è uguale alla misura del raggio della circonferenza stessa. Come si può facilmente intuire, il radiante ed il grado sono grandezze incommensurabili. Facendo riferimento alla figura, l'angolo α formato dalla semiretta ON e OM misura 1 radiante se l'arco $\widehat{A}$ misura quanto il raggio della circonferenza.

La misura di un arco va fatta con una modalità differente rispetto a quella utilizzata per la misura dei segmenti. Si può immaginare di utilizzare come strumento di misura un *metro flessibile*, ovvero un filo flessibile ma inestensibile, che si può piegare ma non si può allungare o accorciare, su cui siano state tracciate a distanza regolare delle tacche corrispondenti a sottomultipli dell'unità di misura delle lunghezze; una di queste tacche viene assunta come origine del metro. Facendo combaciare l'origine del metro flessibile con il punto M e flettendo il metro in modo che si sovrapponga all'arco MN si otterrà la lunghezza dell'arco A. Ricordando che il rapporto tra la misura della circonferenza ed il raggio vale 2π, dove π è il numero irrazionale 3,1415… (i puntini indicano che la parte decimale è infinita e non periodica), possiamo intuire che il valore dell'angolo giro (360°), corrispondente ad un arco che coincide con l'intera circonferenza, vale 2π radianti.
Diamo ora una tabella che fornisce i valori degli angoli più comuni espressi in radianti:

angolo in gradi	angolo in radianti
360°	2π
180°	π
90°	π/2
60°	π/3
30°	π/6
45°	π/4
270°	3π/2

►7. Angoli negativi

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito l'angolo come l'insieme dei punti compresi tra due semirette aventi la stessa origine O. Possiamo però definire l'angolo anche come rotazione di una semiretta intorno alla propria origine, la misura di un angolo diventa allora la misura dell'entità della rotazione.

L'angolo può essere definito come rotazione di una semiretta intorno alla sua origine.

Dal momento che una rotazione può essere effettuata in due versi, orario od antiorario, si assume uno dei due versi di rotazione come positivo e l'altro negativo. Per motivi storici si è assunto come positivo il verso di rotazione antiorario e negativo quello orario.
Da questa definizione segue che $A\widehat{O}B=-B\widehat{O}B$, dove $A\widehat{O}B$ è l'angolo formato dalla semiretta AO rispetto alla semiretta OB.
Inoltre la misura dell'angolo è definita a meno di un multiplo intero di 360°, ovvero gli angoli α e α+360° hanno la stessa ampiezza, lo stesso dicasi per tutti gli angoli del tipo $\alpha+n\cdot 360°$ o $\alpha-n\cdot 360°$ con n intero. Per esempio, sono congruenti gli angoli di 45°, di 405°, 765°,…

112 Calcola la misura dell'ampiezza di due angoli di cui si sa che sono complementari e che la loro differenza misura 12°30'.

113 Calcola la misura di due angoli adiacenti, di cui si sa che uno è 3/4 dell'altro.

114 Un angolo che sia i 3/5 di un angolo giro misura:
[A] 72° [B] 216° [C] 330° [D] 550°

115 Se ad un angolo retto sommo i suoi 5/3 ottengo un angolo la cui misura è
[A] 240° [B] 150° [C] 144° [C] 125°

116 Le quattro semirette a, b, c, d hanno la stessa origine O e sono disposte in senso antiorario; m è la bisettrice sia dell'angolo $a\widehat{O}d$ che dell'angolo b $b\widehat{O}c$. Sapendo $b\widehat{O}c$ che misura 70° e $a\widehat{O}d$ misura 110° quanto misurano gli angoli $a\widehat{O}b$ e $c\widehat{O}d$?

117 La somma di due angoli è 3/4 di un angolo retto. Sapendo che uno è doppio dell'altro quale frazione di angolo retto è ciascuno dei due angoli?

118 Disegna tre angoli consecutivi $a\widehat{O}b\,,b\widehat{O}c\,,c\widehat{O}d\,,$ di cui si sa che la loro somma è un angolo piatto e $a\widehat{O}b$ è $\frac{2}{3}$ dell'angolo piatto. Determina quanto misura l'angolo formato dalle bisettrici degli angoli $b\widehat{O}c$ e $c\widehat{O}d$.

►8. Poligoni e poligonale

DEFINIZIONE. Si chiama **spezzata** una figura formata da una sequenza ordinata di segmenti uno consecutivo all'altro. I segmenti che formano la spezzata si chiamano **lati**, gli estremi dei segmenti si chiamano **vertici**.

Ogni vertice è quindi in comune a due lati, ad eccezione del primo vertice del primo segmento e dell'ultimo vertice dell'ultimo segmento che possono appartenere a un solo segmento.

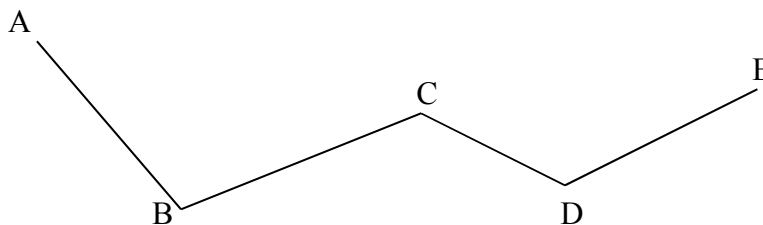



Figura 68. La linea ABCDE è una spezzata, perché formata da segmenti consecutivi. I segmenti AB, BC, CD, DE sono i lati della spezzata, i punti A, B, C, D, E sono i vertici.

DEFINIZIONI. Un spezzata si dice **spezzata chiusa** se il primo estremo del primo segmento coincide con l'ultimo estremo dell'ultimo segmento; si dice **spezzata aperta** se il primo estremo e l'ultimo estremo sono distinti.

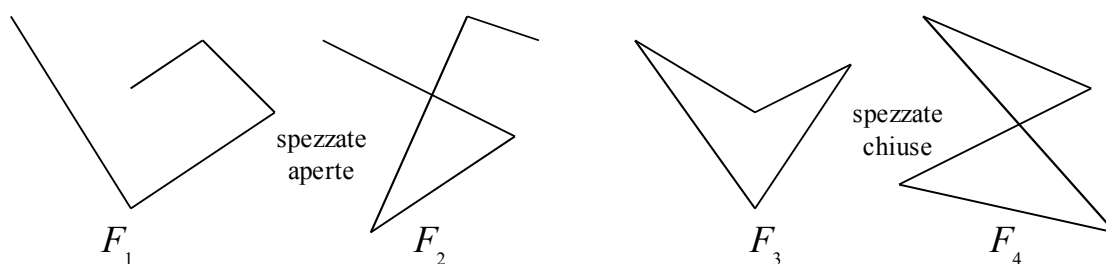



Figura 69. Le figure F_1 e F_2 sono spezzate aperte in quanto hanno il primo e l'ultimo vertice che non coincidono; le figure F_3 e F_4 sono spezzate chiuse in quanto tutti i vertici appartengono a due lati consecutivi.

DEFINIZIONI. Un spezzata si dice **intrecciata** se almeno due suoi lati si intersecano in punti diversi dagli estremi; si dice **semplice** o **non intrecciata** se ogni coppia di lati non consecutivi non ha punti in comune.

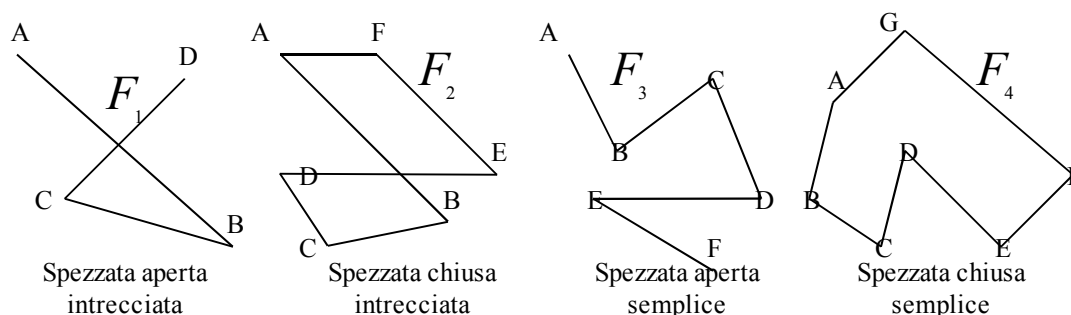



Figura 70. La figura F_1 è un spezzata aperta intrecciata (gli estremi A e D non coincidono, i lati CD e AB si intersecano); la figura F_2 è una spezzata chiusa intrecciata (ogni vertice è in comune a due lati, i lati AB e DE si intersecano); la figura F_3 è una spezzata aperta semplice (gli estremi A ed F non coincidono, non ci sono lati non consecutivi che si intersecano); la figura F_4 è una spezzata chiusa semplice (ogni vertice è in comune a due lati, non ci sono lati non consecutivi che si intersecano).

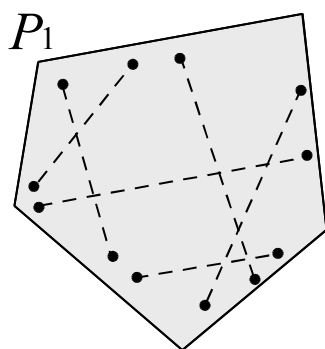
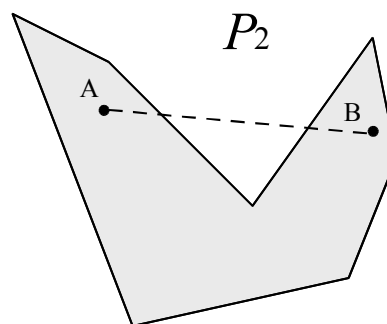
DEFINIZIONE. Si chiama **poligonale** una spezzata chiusa non intrecciata.

Poligono

DEFINIZIONI. Si chiama **poligono** la figura formata da una poligonale e dalla parte finita di piano da essa delimitata.

In un poligono chiamiamo:

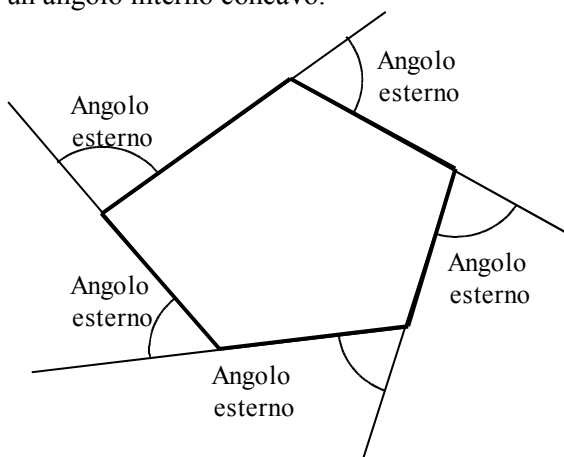
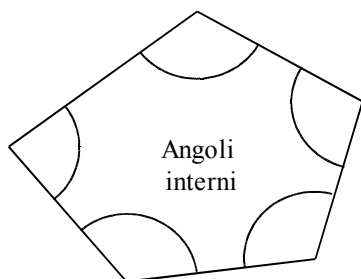
- **vertici** del poligono i vertici della poligonale;
- **lati** del poligono i lati della poligonale;
- **contorno** del poligono la poligonale stessa;
- **punti interni** i punti del poligono non situati sul contorno;
- **punti esterni** tutti i punti del piano che non sono interni e non appartengono al contorno;
- **perimetro** del poligono il segmento somma dei lati del poligono.

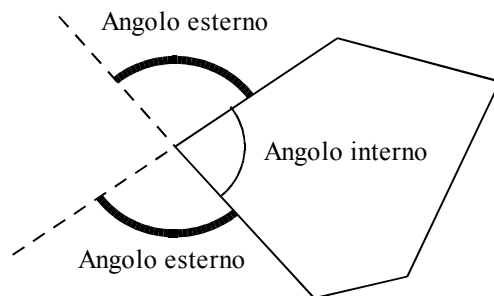
DEFINIZIONE. Un poligono si dice **poligono convesso** se è una figura convessa, cioè se il segmento che ha per estremi due suoi punti qualsiasi è interamente contenuto nel poligono, si dice concavo se non è convesso, cioè se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce non è contenuto interamente nel poligono.

Il poligono P_1 è convesso perché comunque si prendono due suoi punti interni, il segmento che li unisce è interno al poligono; il poligono P_2 è concavo perché il segmento AB cade in parte all'esterno del poligono.

Nel seguito quando parleremo di poligoni intendiamo sempre poligoni convessi.
In un poligono chiamiamo:

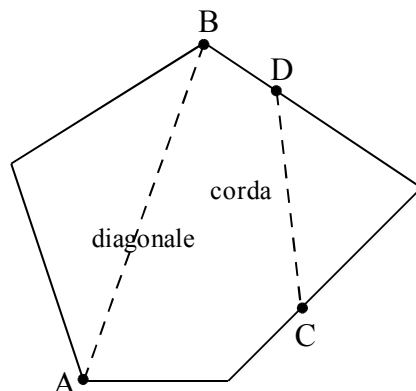
- angolo interno o angolo del poligono ognuno degli angoli che ha per lati le semirette che contengono due lati consecutivi del poligono e ha per vertice il vertice del poligono in comune a quei due lati;
- **angolo esterno** è ciascun angolo adiacente ad un angolo interno.

Osservazioni

- Un poligono **è convesso se ogni angolo interno è convesso.**
- **Un poligon**o è concavo se ha almeno un angolo interno concavo.

Nella figura a sinistra sono indicati gli angoli interni al poligono, nella figura di destra sono indicati gli angoli esterni, ognuno di essi è adiacente a un angolo interno.

Osserva che per ogni angolo interno esistono due angoli esterni, congruenti tra di loro perché opposti al vertice, ovvero perché supplementari dello stesso angolo.

Ogni angolo interno ha due angoli esterni adiacenti ad esso.

Inoltre definiamo:

- **corda** ogni s**egmento che unisce due qualsiasi punti del contorno del poligono che non appartengono allo stesso lato;**
- **diagonale ogni** corda che unisce due vertici non consecutivi.

Il segmento AB è una diagonale del poligono poiché unisce i vertici non consecutivi A e B; il segmento DC è una corda poiché unisce due punti posti su due lati distinti del poligono.

I poligoni hanno nomi diversi a seconda del loro numero di lati:

- **triangolo** è u**n poligono con tre lati;**
- quadrilatero è un poligono con quattro lati;
- pentagono è un poligono con cinque lati;
- **esagono è un pol**igono con sei lati, e così via.

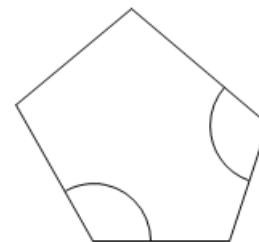
Un poligono si dice **equilatero** se ha tutti i lati congruenti tra di loro; si dice **equiangolo** se ha tutti gli angoli interni congruenti tra di loro. Un poligono che è equiangolo e equilatero si dice **poligono regolare**.

119 Quante diagonali ha un triangolo?

[A] nessuna [B] 1 [C] 2 [D] 3

120 Quante diagonali puoi tracciare dal vertice di un poligono di 6 lati?

[A] 6 [B] 5 [C] 4 [D] 3

121 Traccia l'angolo esterno relativo agli angoli interni indicati con un arco.

122 Quali tra le seguenti figure geometriche sono sempre congruenti?

a) Tutti i punti sono congruenti V F
b) Tutte le rette sono congruenti V F
c) Tutte le semirette sono congruenti V F
d) Tutti i semipiani sono congruenti V F
e) Tutti gli angoli sono congruenti V F
f) Tutti i poligoni convessi sono congruenti V F
g) Tutti i triangoli sono congruenti V F
h) Tutti i triangoli equilateri sono congruenti V F
i) Tutti i quadrati sono congruenti V F

Problemi risolubili con equazioni

123 Di due angoli adiacenti uno è i sette terzi dell'altro; calcola l'ampiezza di ciascun angolo.

124 La somma di tre angoli misura 200°; sapendo che il primo è cinque terzi del secondo e questo è tre quarti del terzo, trovare l'ampiezza di ognuno.

125 La somma di tre angoli consecutivi è un angolo giro. Sapendo che il primo è due terzi del secondo e questo è tre quarti del terzo, qual è l'ampiezza di ogni angolo?

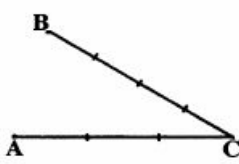
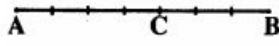
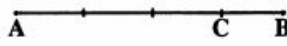
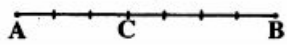
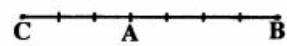
126 Determinare la misura dei due segmenti AB e CD sapendo che $AB=\frac{5}{7}CD$ e che la loro somma è 24 cm.

127 Determinare la misura di due segmenti sapendo che il loro rapporto è 5/7 e la loro differenza è 12 cm.

128 La somma di due segmenti è 21 cm e il minore di essi supera di 5 cm i 3/4 del maggiore. Calcola la misura di ciascun segmento.

129 Determina la lunghezza di due segmenti sapendo che l'uno supera l'altro di 12 cm e che la loro somma è 102 cm.

130 Un segmento, lungo 59 cm, è stato diviso in parti. Sapendo che i 5/6 di una parte sono uguali ai quattro settimi dell'altra, qual è la lunghezza di ogni parte?

Quesiti dalle prove INVALSI

131 Che cosa si definisce “diagonale” in un poligono convesso?
Un segmento che…

A. Congiunge due vertici non consecutivi del poligono.
B. Congiunge due vertici qualsiasi del poligono.
C. Congiunge i punti medi di due lati consecutivi del poligono.
D. Divide il poligono in due parti congruenti.

(*Prove invalsi 2006*)

132 Scegli tra le seguenti figure quella in cui risulta vera l'uguaglianza $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{4}$

(*Prove INVALSI 2006*)

133 Due segmenti misurano 5dm e 30cm rispettivamente. Qual è il rapporto fra la lunghezza del secondo segmento e quella del primo?

A. 6 B. 5/3 C. 3/5 D. 1/6

(*Prove INVALSI 2005*)

134 I punti A, B e C sono allineati come in figura. Se l'angolo $A\hat{B}E$ misura 54° e BD è la bisettrice dell'angolo $E\hat{B}C$, quanto misura l'angolo $D\hat{B}C$?

A. 26° B.36° C. 54° D. 63°

(*Prove INVALSI 2005*)

135 A, B e C sono tre punti nel piano tali che per i seguenti tre angoli, tutti minori di un angolo piatto, valga la relazione $B\hat{A}C=A\hat{B}C+A\hat{C}B$. Quanto vale $B\hat{A}C$?

A. 70° B. 80° C. 90° D. 100°

(*Prove INVALSI 2005*)

136 Un poligono è regolare se tutti i suoi lati sono uguali e tutti i suoi angoli sono uguali. Un poligono non è regolare se e solamente se…

A. Tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli sono disuguali
B. Tutti i suoi lati o tutti i suoi angoli sono disuguali
C. Almeno due dei suoi lati e almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali
D. Almeno due dei suoi lati o almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.

MATEMATICA C3 - GEOMETRIA 1

2. CONGRUENZA NEI TRIANGOLI

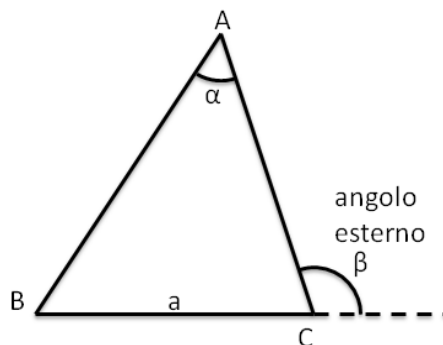
Triangle Shapes Photo by: maxtodorov
Taken from: http://www.flickr.com/photos/maxtodorov/3066505212/

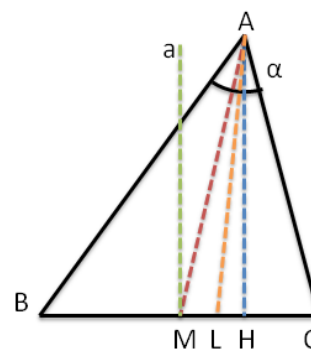
Indice

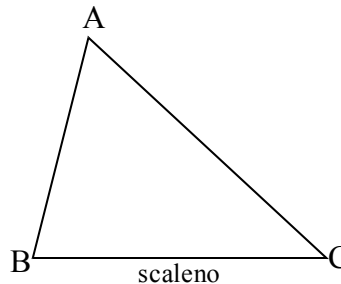
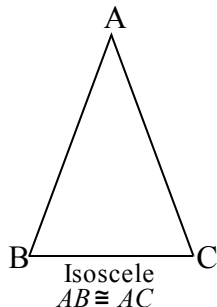
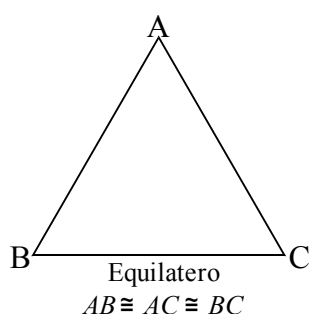
►1. Definizioni relative ai triangoli

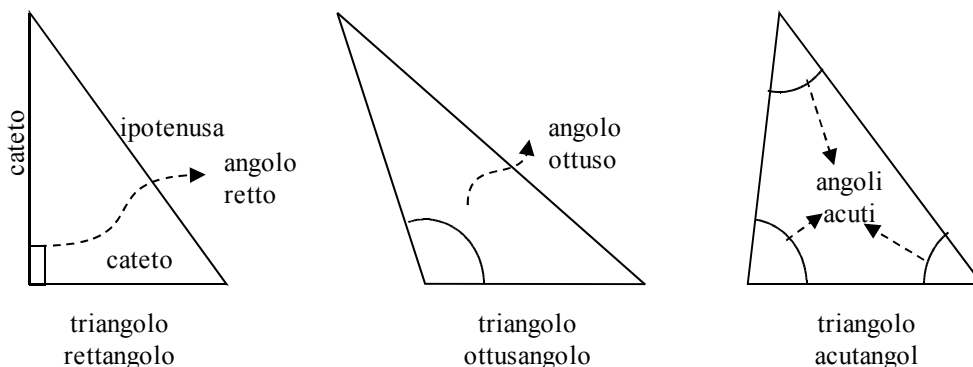
Definiamo gli elementi principali di un triangolo

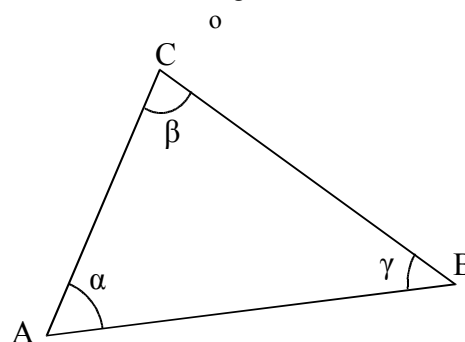
- Un **triangolo** è un poligono di tre lati.
- Si chiamano **vertici** gli estremi dei lati.
- Un vertice si dice **opposto a un lato** se non appartiene a quel lato.
- Si chiamano **angoli interni** del triangolo i tre angoli formati dai lati.
- Un **angolo interno** si dice angolo compreso tra due lati quando i lati dell'angolo contengono dei lati del triangolo.
- Un angolo interno si dice **angolo adiacente a un lato** del triangolo quando uno dei suoi lati contiene quel lato del triangolo.
- Un angolo si dice **angolo esterno al triangolo** se è un angolo adiacente a un angolo interno.

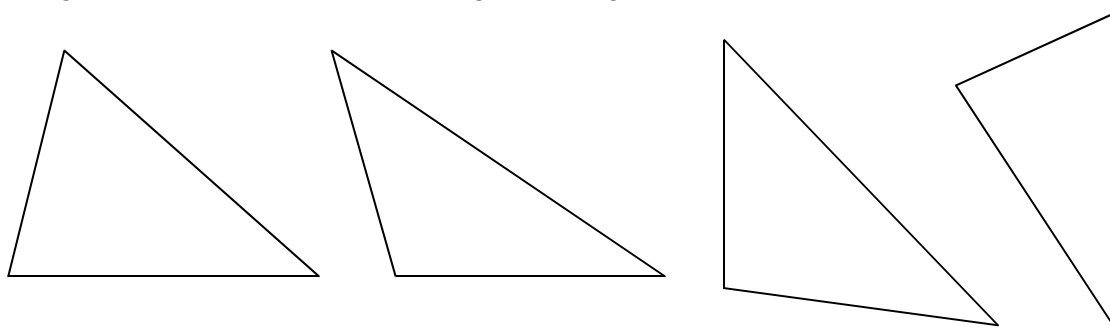
Nella figura a lato, A, B e C sono i vertici del triangolo. Il vertice A è opposto al lato a. L'angolo α è angolo interno al triangolo. L'angolo γ è esterno. L'angolo α è compreso tra i lati AB e AC.

- Si dice **bisettrice** relativa a un vertice, il segmento di bisettrice dell'angolo al vertice che ha per estremi il vertice stesso e il punto in cui essa incontra il lato opposto.
- Si dice **mediana** relativa a un lato il segmento che ha per estremi il punto medio del lato e il vertice opposto a quel lato.
- Si dice **altezza** di un triangolo relativa a un suo lato il segmento di perpendicolare che ha per estremi il vertice opposto al lato e il punto di intersezione della perpendicolare con la retta contenente il lato.
- Si dice **asse** di un triangolo, relativo a un suo lato, la perpendicolare al lato condotta nel suo punto medio.

Nel triangolo della figura, AL è la bisettrice dell'angolo nel vertice A; AH è altezza relativa alla base BC; AM è mediana relativa al lato BC, la retta *a* è l'asse di BC.

Classificazione dei triangoli rispetto ai lati:

- un triangolo si definisce **equilatero** se ha i tre lati congruenti;
- un triangolo si definisce **isoscele** se ha (almeno) due lati congruenti;
- un triangolo si definisce **scaleno** se ha i tre lati a due a due non congruenti;

Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli:

- un triangolo si dice **rettangolo** se ha un angolo interno retto;
- in un triangolo rettangolo si dice **ipotenusa** il lato che si oppone all'angolo retto, si dicono **cateti** i lati adiacenti all'angolo retto;
- un triangolo si dice **ottusangolo** se ha un angolo interno ottuso;
- un triangolo si dice **acutangolo** se ha tutti gli angoli interni acuti.

1 In base alla figura rispondi alle seguenti domande

a) Il lato AB si oppone all'angolo … … …
b) L'angolo α si oppone al lato … …
c) L'angolo di vertice C si chiama …
d) L'angolo γ è adiacente ai lati … … e … …
e) I lati AB e BC sono adiacenti all'angolo …
f) I lati AC e AB formano l'angolo …
g) Traccia l'angolo esterno al triangolo nel vertice A
h) Traccia la bisettrice dell'angolo β
i) Traccia l'altezza relativa alla base AB
j) La mediana relativa al lato BC

2 Disegna un segmento AB e poi disegna i triangoli ABC e ABD che hanno la base AB in comune.

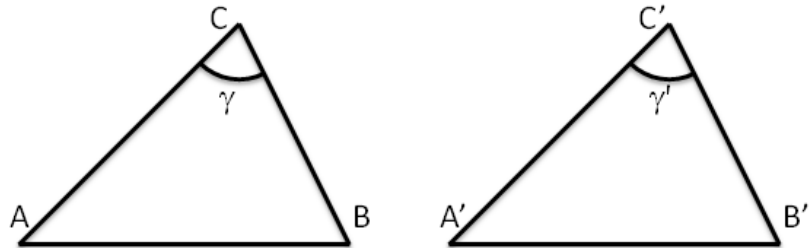
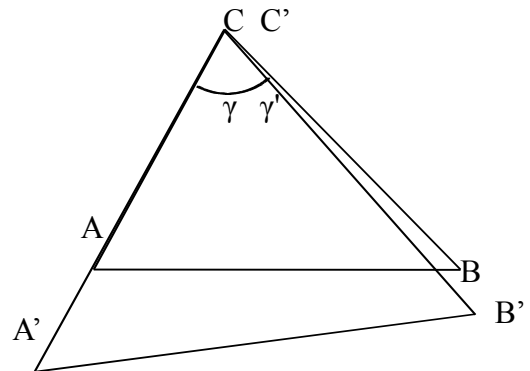
3 Disegna le tre altezze di ciascuno dei seguenti triangoli

►2. Primo e secondo criterio di congruenza dei triangoli

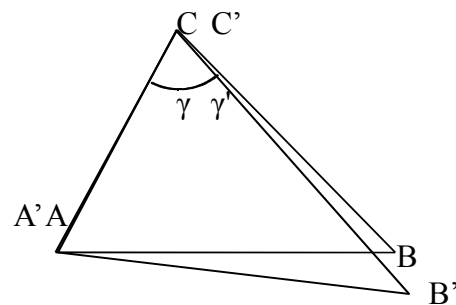
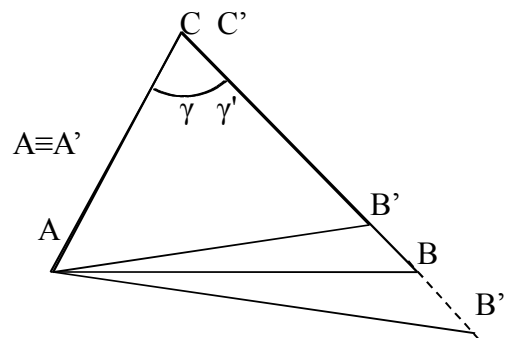
Ricordiamo che due figure piane sono congruenti se sono sovrapponibili, cioè se è possibile spostare una sull'altra, senza deformarle, in modo che coincidano perfettamente.
In particolare, due triangoli sono sovrapponibili se hanno "ordinatamente" congruenti i tre lati ed i tre angoli. Con il termine ordinatamente intendiamo che, a partire da una coppia di vertici e procedendo lungo il contorno in senso orario oppure antiorario, incontriamo lati congruenti e vertici di angoli congruenti. Nel caso dei triangoli, questo succede esattamente quando angoli congruenti nei due triangoli sono compresi tra coppie di lati congruenti o, in maniera equivalente, quando sono opposti a lati congruenti.
I criteri di congruenza dei triangoli ci dicono che basta conoscere la congruenza di solo alcuni elementi dei due triangoli, generalmente tre elementi di un triangolo congruenti a tre elementi dell'altro triangolo, per poter affermare la congruenza di due triangoli, e quindi dedurne la congruenza degli altri elementi.
Un modo tradizionale di presentare l'argomento, dovuto allo stesso Euclide, è quello di "dimostrare" i primi due criteri di congruenza dei triangoli facendo uso della definizione di congruenza come "uguaglianza per sovrapposizione", e di utilizzarli successivamente per la verifica di altre proprietà.

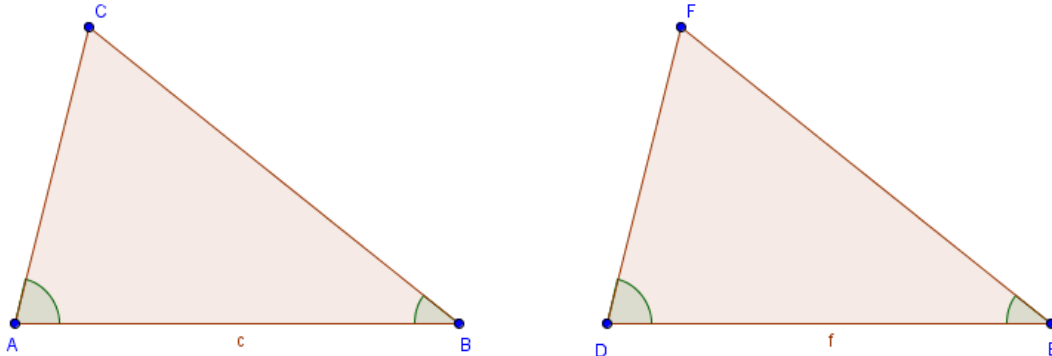
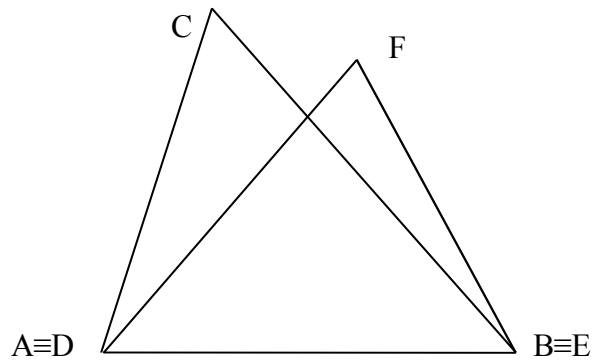
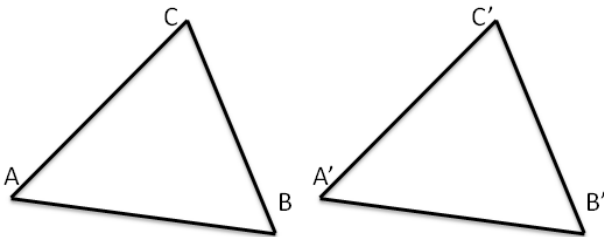
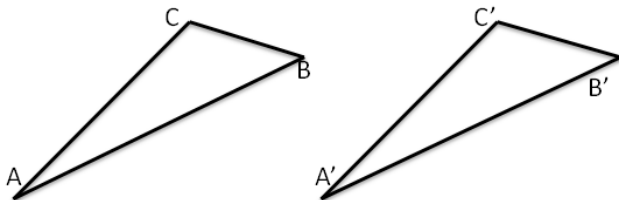
Secondo il matematico tedesco D. Hilbert (1862-1943), il primo criterio di congruenza è un assioma, il secondo criterio può essere dimostrato per assurdo attraverso il primo.
Presenteremo questi argomenti basilari alla maniera di Euclide.

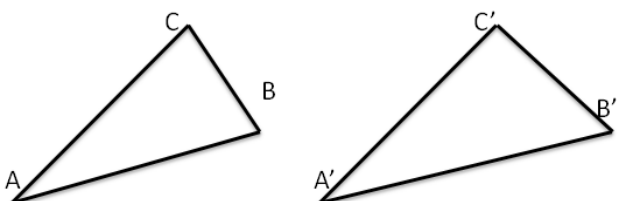
1° CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI
Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso.

<u>*Ipotesi*</u>:
$AC \cong A'C' \quad BC \cong B'C'$
$A\hat{C}B \cong A'\hat{C}'B'$

<u>*Tesi*</u>: $ABC \cong A'B'C'$

<u>Dimostrazione</u>. Vogliamo provare che il triangolo *A'B'C'* può essere portato a sovrapporsi perfettamente al triangolo *ABC*.
A tal proposito, portiamo il punto C' sul punto C in modo tale che la semiretta C'A' sia sovrapposta alla semiretta CA ed i punti B e B' siano nello stesso semipiano individuato dalla retta AC.
Dopo questo movimento, i triangoli potrebbero trovarsi nella posizione della figura a lato?
Vediamo perché questa situazione non è possibile. Abbiamo supposto per ipotesi che i segmenti AC e A'C' siano congruenti, pertanto se C coincide con C' anche A deve coincidere necessariamente con A', mentre nella figura A'C' è maggiore di AC.

Allora i triangoli potrebbero trovarsi almeno nella seguente posizione, nella quale A e A' coincidono?

Tuttavia nemmeno questa posizione è possibile poiché abbiamo supposto per ipotesi che gli angoli γ e γ' siano congruenti, mentre dalla figura risulta che γ è maggiore di γ'. Di conseguenza la semiretta per CB e la semiretta per C'B' devono sovrapporsi, in quanto devono formare lo stesso angolo con la semiretta per CA.

A questo punto, rimane da fissare la posizione di B' rispetto a B, cioè rimane da decidere se B' cade internamente al segmento CB, come nella figura che segue, se B' cade esternamente al segmento CB o se B' e B coincidono.
Poiché per ipotesi $BC \cong B'C'$, il punto B' deve necessariamente coincidere con B. Pertanto i vertici del triangolo ABC si sovrappongono ai vertici del triangolo A'B'C' e di conseguenza i triangoli ABC e A'B'C' sono congruenti ■

2° CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI **Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due angoli e il lato tra essi compreso.**

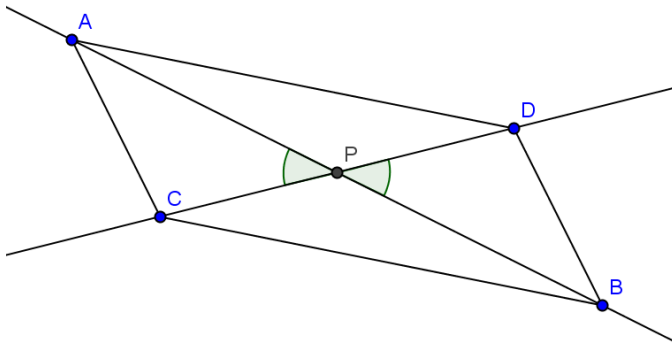
<u>*Ipotesi*</u>: $AB \cong DE$, $C\widehat{A}B \cong F\widehat{D}E$, $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$.
<u>*Tesi*</u>: $ABC \cong DEF$.
Dimostrazione. Vogliamo provare che il triangolo *DEF* può essere portato a sovrapporsi perfettamente al triangolo *ABC*.

A tal proposito, in virtù della congruenza dei lati *AB* e *DE*, portiamo a sovrapporre il segmento *DE* al segmento *AB* in maniera tale che D coincida con A, E coincida con B, e i punti C ed F siano nello stesso semipiano individuato dalla retta AB.
I due triangoli potrebbero trovarsi nella seguente posizione?
Dalla congruenza degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$, segue che la semiretta DF sarà sovrapposta alla semiretta AC; analogamente, dalla congruenza degli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{E}$, segue che la semiretta EF sarà sovrapposta alla semiretta BC. Dunque C ed F devono necessariamente coincidere, perché sono l'unica intersezione di due rette incidenti. Poiché i tre vertici si sono sovrapposti, i due triangoli sono completamente sovrapposti e quindi sono congruenti ■

4 Per ciascuna delle seguenti coppie di triangoli indica se sono congruenti ed eventualmente per quale criterio.

Si sa che sono congruenti i lati AB con A'B' e AC con A'C', l'angolo in A con l'angolo A'.
I triangoli sono congruenti? SI NO

Se sì, per il … … … … … … … …

Si sa che sono congruenti i lati AB con A'B' e gli angoli in A con B' e B con A'.
I triangoli sono congruenti? SI NO
Se sì, per il … … … … … … … …

Si sa che sono congruenti ilati AB con A'B' e BC con A'C', l'angolo in A con A'
I due triangoli sono congruenti? SI NO

Se sì, per il … … … … … … … …

Esempio

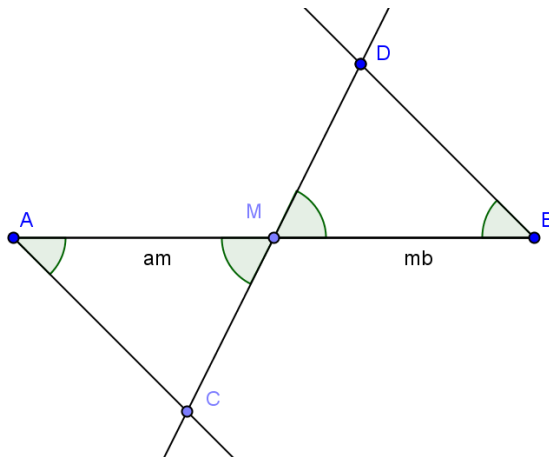
- Si considerino due rette incidenti, r ed s, ed il loro punto in comune P. Sulle semirette opposte di origine P si prendano punti equidistanti da P, come in figura, in maniera tale che $AP \cong PB$, $CP \cong PD$. Dimostra che, unendo i quattro punti in modo da costruire un quadrilatero, i quattro triangoli che si vengono a formare sono a due a due congruenti: $ACP \cong BDP$, $ADP \cong BPC$.

Realizziamo il disegno ed esplicitiamo ipotesi e tesi

Ipotesi
$r \cap s = P$
$AP \cong PB$
$CP \cong PD$

Tesi
$ACP \cong BDP$
$ADP \cong BPC$

Dimostrazione. I triangoli ACP e BPD hanno: $AP \cong PB$ per ipotesi, $CP \cong PD$ per ipotesi, $A\hat{P}C \cong B\hat{P}D$ perché opposti al vertice. Pertanto sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli.
Analogamente, i triangoli ADP e BPC hanno: … … … … … … … …

Esempio

- Si considerino un segmento AB ed il suo punto medio M. Si tracci una generica retta r passante per M e distinta dalla retta per AB. Si traccino inoltre due semirette di origine rispettivamente A e B, situate nei due semipiani opposti rispetto alla retta per AB, che intersechino la retta r rispettivamente in C e in D e che formino con la retta per AB due angoli congruenti (vedi figura). Detti C e D i rispettivi punti d'intersezione delle due semirette con la retta r, dimostra che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.

Ipotesi:
$AM \cong MB$
$M\hat{A}C \cong M\hat{B}D$

Tesi:
$AMC \cong BMD$

Dimostrazione. I segmenti AM e MB sono congruenti in quanto M è il punto medio di AB, gli angoli di vertice M sono congruenti perché opposti al vertice, gli angoli di vertice A e B sono congruenti per costruzione. Allora i triangoli AMC e BMD sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli.

Dimostra le seguenti affermazioni, utilizzando 1° e 2° criterio di congruenza dei triangoli.

5 In un triangolo ABC prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente a MA. Dimostra che il triangolo AMC è congruente al triangolo BMD e che il triangolo ABM è congruente al triangolo CMD.

6 Due triangoli ABC e DEF hanno il lati AB e DE congruenti, hanno inoltre gli angoli esterni ai vertici A e B rispettivamente congruenti agli angoli esterni ai vertici D e E. Dimostra che i due triangoli sono congruenti.

7 Si consideri il segmento AB e per il suo punto medio M si tracci una retta r qualsiasi. Su tale semiretta, da parti opposte rispetto a AB, si prendano due punti S e T tali che $SM \cong MT$. Dimostrare che i triangoli AMS e TMB sono congruenti.

8 Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti i due cateti.

9 Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l'angolo acuto adiacente ad esso.

10 Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti l'angolo al vertice e i due lati obliqui.

11 Nel triangolo isoscele ABC, di base BC, prolunga la bisettrice AD di un segmento DE. Dimostra che AE è bisettrice dell'angolo $B\widehat{E}C$

12 Dati due triangoli congruenti ABC e A'B'C', si considerino sui lati AC e A'C' due punti D e D' tali che $DC \cong D'C'$. Dimostrare che $DB \cong D'B'$.

13 Siano ABC e DEF due triangolo congruenti. Sui lati congruenti AB e DE prendi il punto G su AB e H su DE, in modo che $AG \cong DH$. Dimostra che anche GC è congruente ad HF.

14 In un triangolo ABC, sul prolungamento del lato AB, dalla parte di B, prendi un punto D tale che $BD \cong AB$, analogamente sul prolungamento del lato CB, dalla parte di B, prendi un punto E tale che $EB \cong BC$. Dimostra che la mediana BM del triangolo ABC è allineata con la mediana BN del triangolo DBE, ossia che l'angolo formato dalle due mediane è un angolo piatto.

15 Del triangolo ABC prolunga il lato AB di un segmento BD congruente a BC, analogamente prolunga il lato CB di un segmento BE congruente ad AB. Traccia la bisettrice BF del triangolo ABC e la bisettrice BG del triangolo DBE. Dimostra che $BF \cong BG$.

16 Nel triangolo ABC traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Con origine in D traccia due semirette che incontrano rispettivamente AC in E e AB in F, in modo che $A\widehat{D}F \cong A\widehat{D}E$. Dimostra che il triangolo AFE è un triangolo isoscele.

17 Nel triangolo ABC con AC<AB traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Per il punto D traccia la perpendicolare alla bisettrice AD. Detti E ed F i punti in cui la perpendicolare incontra rispettivamente i lati AC e AB, dimostra che $AF \cong AE$.

18 Sui prolungamenti oltre A del lato AC, oltre B del lato AB e oltre C del lato BC di un triangolo equilatero ABC si considerino i segmenti congruenti AA', BB', CC'. Dimostrare che il triangolo A'B'C' è ancora equilatero.

19 Dato l'angolo convesso $b\widehat{A}c$ si considerino su b i due punti B e B', su c si considerino i punti C e C', tali che AB e AB' siano rispettivamente congruenti con AC e con AC'. Dimostrare che BB' e BC' sono rispettivamente congruenti con CC' e B'C.

20 Dato un segmento AB, condurre per il suo punto medio M una qualsiasi retta r e considerare su di essa, da parti opposte rispetto ad AB, due segmenti congruenti MC e MD. Dimostrare che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.

21 Sui lati dell'angolo $X\widehat{O}Y$ si considerino i punto A e B tali che $OA \cong OB$. Sia H un punto della bisettrice dell'angolo tale che OH<OA. Siano T il punto di intersezione di AH con OY e S il punto di intersezione di BH con OX. Dimostrare che $AH \cong HB$ e $SH \cong HT$.

22 Si consideri un punto O interno al triangolo ABC e si congiunga tale punto con i vertici A e B del triangolo. Si prolunghino i segmenti AO e BO oltre O di due segmenti OA' e OB' rispettivamente congruenti ai suddetti segmenti. Dimostrare che i segmenti AB e A'B' sono congruenti.

23 Si considerino i triangoli congruenti ABC e A'B'C' e si prolunghino i lati AB e A'B' di due segmenti BP e B'P' tra loro congruenti. Si prolunghino inoltre i lati AC e A'C' di due segmenti CQ e C'Q' tra loro congruenti. Si dimostri che sono congruenti i triangoli APQ e A'P'Q'; $CP \cong C'P'$, $QB \cong Q'B'$.

24 Sui lati *a* e *b* di un angolo di vertice O prendi i punti A e B sulla semiretta *a* e i punti C e D sulla semiretta *b*, in modo che $OA \cong OC$ e $AB \cong CD$. Sia E il punto di intersezione di AD con BC. Dimostra che sono congruenti i triangoli ABE e CDE.

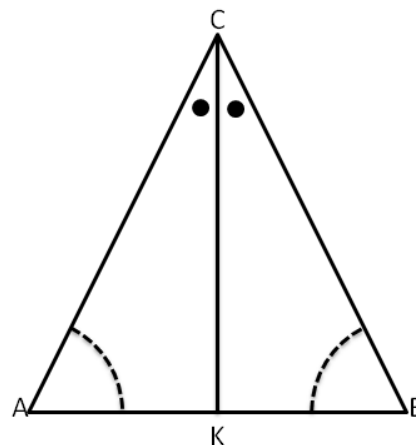
25* Sia C un punto della bisettrice dell'angolo convesso $X\hat{O}Y$ e A e B due punti dei lati OX e OY dell'angolo tali che $OA \cong OB$. Dimostra che i triangoli BCO e ACO sono congruenti.

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 118; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

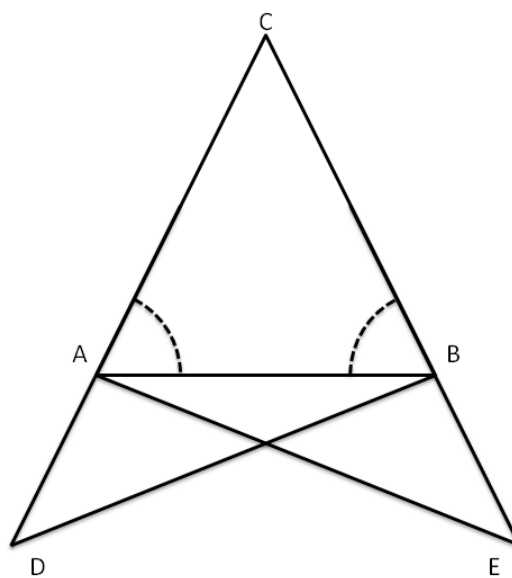
►3. Teoremi del triangolo isoscele

Il triangolo isoscele ha almeno due lati congruenti, l'eventuale lato non congruente si chiama **base**, i due lati congruenti si dicono **lati obliqui**.
Il triangolo equilatero è un caso particolare di triangolo isoscele: si dice che **il triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base**.

TEOREMA (DIRETTO) DEL TRIANGOLO ISOSCELE.
In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

Ipotesi: $AC \doteq BC$
Tesi: $B\hat{A}C \cong A\hat{C}B$
Dimostrazione
Tracciamo la bisettrice CK dell'angolo in C.
I triangolo ACK e BCK sono congruenti per il primo criterio, infatti hanno:
$AC \doteq CB$ per ipotesi
CK lato in comune
$A\hat{C}K \doteq B\hat{C}K$ perché CK è la bisettrice dell'angoloin C.
Pertanto, essendo congruenti hanno tutti gli elementi congruenti, in particolare l'angolo in A è congruente all'angolo in B ■

Il teorema precedente è invertibile, nel senso che è valido anche il teorema inverso, quello che si ottiene scambiando ipotesi e tesi.

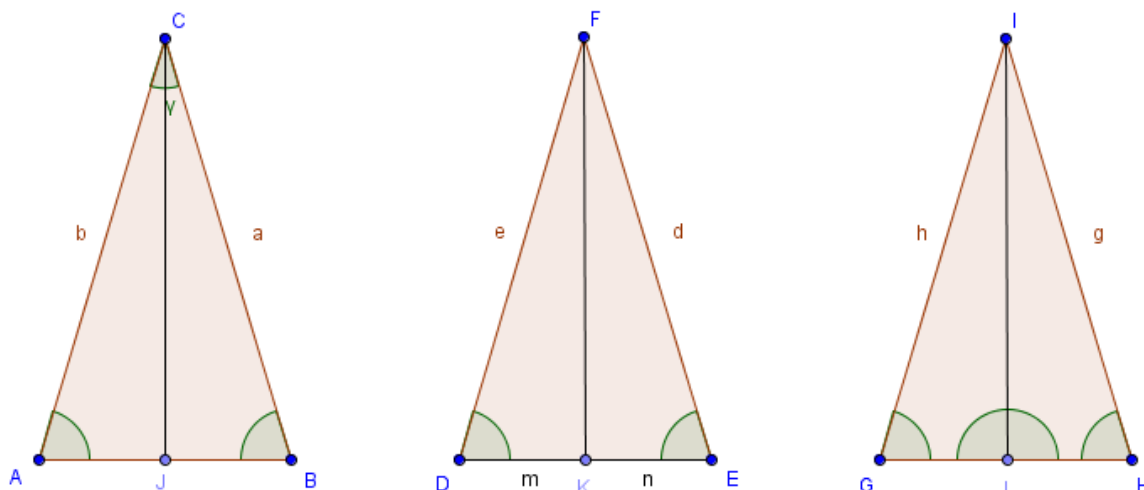
TEOREMA INVERSO DEL TRIANGOLO ISOSCELE
Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele (rispetto al lato compreso tra gli angoli congruenti preso come base**).**

Ipotesi: $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$
Tesi: $AC \cong BC$
Dimostrazione: Procediamo per passi, realizzando una costruzione che ci permetta di confrontare coppie di triangoli congruenti. Prolunghiamo i lati AC e BC dalla parte di A e di B rispettivamente, e sui prolungamenti prendiamo due punti D ed E in maniera tale che risulti $AD \cong BE$.
Osserviamo che i triangoli *ADB* e *BAE* risultano congruenti per il 1° criterio, avendo in comune il lato AB ed essendo $AD \cong BE$ per costruzione e $D\hat{A}B \cong A\hat{B}E$ perché adiacenti agli angoli $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ congruenti per ipotesi.Pertanto, tutti gli elementi dei due triangoli ADB e AEB sono ordinatamente congruenti, in particolare $DB \cong AE$, $A\hat{D}B \cong B\hat{E}A$ $A\hat{B}D \cong B\hat{A}E$.
Confrontiamo ora i triangoli *CDB* e *CAE* ,risultano congruenti per il 2° criterio poiché hanno $DB \cong AE$, $C\hat{D}B \cong C\hat{B}A$ per quanto appena dimostrato e $C\hat{B}D \cong C\hat{A}E$ perché somma di angoli rispettivamente congruenti: $C\hat{B}D \cong C\hat{B}A + A\hat{B}D$ e $C\hat{A}E \cong C\hat{A}B + B\hat{A}E$.
Pertanto, i restanti elementi dei due triangoli risultano ordinatamente congruenti:
In particolare $CB \cong CA$, che è la tesi che volevamo dimostrare ■

Dai due teoremi precedenti seguono importanti proprietà, che qui riportiamo come corollari.

COROLLARI
Un triangolo equilatero è anche equiangolo.
Viceversa, se un triangolo è equiangolo, allora è equilatero.
Un triangolo scaleno non ha angoli congruenti.
Viceversa, se un triangolo non ha angoli congruenti, allora è scaleno.

Dimostrazioni

(1) Poiché un triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base, la tesi segue dal teorema diretto del triangolo isoscele.
(2) Possiamo confrontare gli angoli a due a due; risulteranno i lati congruenti a due a due in base al teorema inverso del triangolo isoscele.
(3) Se per assurdo un triangolo scaleno avesse due angoli congruenti, allora risulterebbe isoscele, in base al teorema inverso del triangolo isoscele.
(4) Se per assurdo un triangolo che non ha angoli congruenti non fosse scaleno, il che vuol dire che sarebbe isoscele, allora avrebbe angoli congruenti in contrasto con l'ipotesi di assurdo ■

PROPOSIZIONE (PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO ISOSCELE)
In ogni triangolo isoscele, la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice.

In figura, CJ è per ipotesi la bisettrice dell'angolo al vertice γ del triangolo ABC, FK è la mediana relativa alla base DE del triangolo DEF, IL è l'altezza relativa alla base GH del triangolo GHI.
Dividiamo l'enunciato in tre parti:
a) In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana relativa alla base.
b) In un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e altezza relativa alla base.
c) In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.
Dimostriamo le prime due parti della proposizione.
Per ciascuna delle tre parti precedenti, scriviamo ipotesi e tesi; utilizziamo i tre triangoli della figura, segnaliamo che CJ è per ipotesi la bisettrice dell'angolo al vertice γ del triangolo ABC, FK la mediana relativa alla base DE del triangolo DEF, IL l'altezza relativa alla base GH del triangolo GHI.

a) In ABC: <u>Ipotesi:</u> $AC \cong CB$, $C\widehat{A}B \cong C\widehat{B}A$, $A\widehat{C}J \cong B\widehat{C}J$ <u>Tesi:</u> $CJ \perp AB$, $AJ \perp JB$.

b) In DEF: <u>Ipotesi:</u> $DF \cong FE$, $F\widehat{D}E \cong F\widehat{E}D$, $DK \cong KE$ <u>Tesi:</u> $FK \perp DE$, $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$.

c) In GHI: <u>Ipotesi:</u> $IG \cong IH$, $I\widehat{G}H \cong I\widehat{H}G$, $IL \perp GH$ <u>Tesi:</u> $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$, $GL \perp LH$.

Avviamo la dimostrazione delle prime due parti, che lasciamo completare al lettore, rimandando al prossimo capitolo la dimostrazione della terza parte. Utilizziamo i primi due criteri di congruenza, i teoremi del triangolo isoscele e le nozioni comuni della geometria euclidea.

<u>Dimostrazione a)</u>: I triangoli AJC e CJB sono congruenti per il secondo criterio. Infatti… Dunque $AJ \cong JB$ e $A\widehat{J}C \cong C\widehat{J}B$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti.

<u>Dimostrazione b)</u>: I triangoli DKF e FKE sono congruenti per il primo criterio. Infatti… Dunque $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$ e $F\widehat{K}D \cong F\widehat{K}E$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti. ■

Dimostra le seguenti affermazioni sui triangoli isosceli

26 In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati congruenti sono congruenti.

27 In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base sono congruenti.

28 Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti l'angolo al vertice e uno dei lati obliqui.

29 Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e uno degli angoli ad essa adiacenti.

30 Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e la bisettrice dell'angolo al vertice.

31 Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti gli angoli al vertice e due lati corrispondenti qualsiasi.

32* Dimostrare che due triangoli, che hanno congruenti due lati e la mediana relativa ad uno dei due, sono congruenti.

33 In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prendi su AC un punto M e su BC un punto N in modo che $CM \cong CN$, quali delle seguenti coppie di triangoli sono congruenti? Dimostralo.

a) $ACN \cong ANB$ b) $ACN \cong BCM$

c) $ABN \cong ABM$ d) $ABC \cong MNC$

34 In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, indica con M il punto medio di AC, con N il punto medio di CB e con H il punto medio di AB. Quali delle seguenti coppie di triangoli sono congruenti?

a) AMH e HNB b) MNH e MNC c) AMH e MCN

35 Sui lati AC e CB del triangolo isoscele ABC di base AB considera rispettivamente due punti D ed E tali che $CD \cong CE$. Dimostra che i triangoli ADB e AEB son congruenti. Detto P il punto di intersezione tra AE e DB, dimostrare che ABP e DPE sono triangoli isosceli.

36 In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prolunga la base AB, dalla parte di A di un segmento AD e dalla parte di B di un segmento BE congruente ad AD. Dimostra che anche il triangolo DEC è isoscele.

37 Nel triangolo isoscele ABC di base BC, prendi sul prolungamento di BC due segmenti congruenti $BQ \cong AP$, dimostra che APQ è isoscele.

38 Due triangoli isosceli ABC e ABD hanno in comune la base AB, i vertici C e D sono situati da parti opposte rispetto alla base AB. Dimostra che la retta per CD è bisettrice dell'angolo in C.

39 In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C traccia le bisettrici BD all'angolo in B e AE all'angolo in A. Dimostra che $BD \cong AE$. Detto O il punto di intersezione delle bisettrici dimostra che AOB è isoscele. Dimostra che il triangolo ADO è congruente al triangolo BEO.

40 In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prolunga, dalla parte di C la bisettrice CD dell'angolo in C di un segmento CE. Dimostra che ED è bisettrice dell'angolo $A\widehat{E}D$.

41 In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prendi su AC un punto D e su BC il punto E tali che $AD \cong BE$. Detto O il punto di intersezione di AE con BD, dimostra che AOB è isoscele.

42 In un triangolo ABC sia M il punto medio di AB. Traccia la mediana CM e prolungala dalla parte di M di un segmento MD congruente a CM. Dopo aver dimostrato che il triangolo AMC è congruente a BMD, dimostra che se CM è bisettrice dell'angolo in C allora ABC è isoscele.

43 In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prendi su AC un punto D e su CB un punto E in modo che $CD \cong CE$. Dimostra che il triangolo DME, dove M è il punto medio della base AB, è isoscele.

44 Due triangoli isoscele hanno in comune la base,dimostra che la retta che unisce i vertici dei due triangoli divide la base a metà.

45 In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, si ha che $AC \cong CB \cong 2AB$. Indica con M il punto medio di AC e N il punto medio di BC, P il punto di intersezione di BM con AN. Individua tutti i triangoli isosceli che si vengono a formare. Dimostra che ACN è congruente a BCM, che ABP è isoscele, che P appartiene all'altezza CH del triangolo.

46 Sia dato il triangolo ABC e sia M il punto medio del lato AB. Si prolunghi CM di un segmento $MD \cong CM$. Dimostrare che $A\widehat{C}B \cong A\widehat{D}B$.

47 Si prolunghino i lati AC e CB del triangolo isoscele ABC rispettivamente di due segmenti CP e CQ tra loro congruenti. Dimostrare che e che $A\widehat{Q}B \cong A\widehat{P}B$ e che $A\widehat{B}P \cong Q\widehat{A}B$.

48 Sulla base AB di un triangolo isoscele ABC prendi i punti M e N tali che AM<AN e $AM \cong NB$. Dimostra che CMN è isoscele.

49 Sia D il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele ABC di vertice A. Dimostra che BDC è isoscele.

50 Nel triangolo isoscele ABC di base BC prolunga AB di un segmento BD e AC di un segmento CE in modo che $DE \cong CE$. Dimostra che $BE \cong DC$.

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 118; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

►4. Terzo criterio di congruenza dei triangoli

TERZO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI
Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti le tre coppie di lati.

<u>Ipotesi</u>: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$. <u>Tesi</u>: $ABC \cong A'B'C'$.

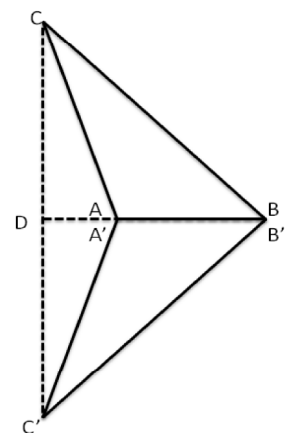
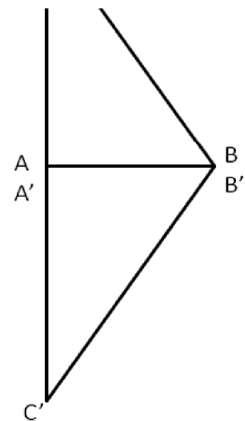
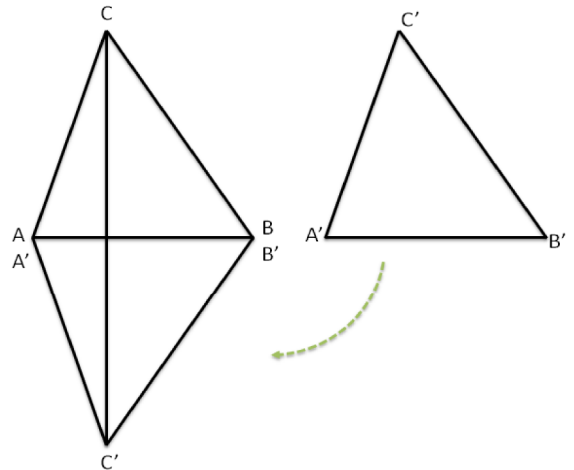
<u>Dimostrazione</u>: Abbiamo due triangoli, ABC e A’B’C’, dei quali sappiamo che i lati dell’uno sono congruenti ai lati dell’altro. Ribaltiamo il triangolo A’B’C’ e portiamo il segmento A’B’ sul segmento AB in modo che il punto A’ coincida con A, il punto B’ coincida con B (ciò è possibile in quanto $AB \cong A'B'$) ed in modo che il punto C’ cada nel semipiano individuato dalla retta AB opposto a quello in cui si trova C. Uniamo C con C’. Viene fuori un disegno diverso a seconda che il punto d’intersezione, che chiamiamo D, tra il segmento CC’ e la retta per AB sia interna al segmento AB oppure coincide con uno degli estremi (A o B) oppure sia esterno al segmento AB. Il punto D esiste in ogni caso in quanto C e C’ sono nei due semipiani opposti individuati dalla retta AB, pertanto il segmento CC’ deve necessariamente tagliare la retta per AB.

<u>Primo caso</u>: D è interno ad AB.
Essendo $AC \cong A'C'$ e $CB \cong C'B'$, i triangoli ACC’ e CC’B sono isosceli, entrambi sulla base CC’. Dunque, per il teorema (diretto) del triangolo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti. Precisamente risulta: $A\hat{C}C' = A\hat{C}'C$ e $C'\hat{C}B \cong C\hat{C}'B$. Inoltre, $A\hat{C}B = A\hat{C}'B$ in quanto somme di angoli congruenti:

$$A\hat{C}B = A\hat{C}D + D\hat{C}B \cong$$
$$\cong A\hat{C}'D + D\hat{C}'B \cong A\hat{C}'B$$

In conclusione ABC e ABC’ sono congruenti per il primo criterio perché hanno: $AC \cong AC'$, $BC \cong BC'$, $A\hat{C}B \cong A\hat{C}'B$.
Infine, poiché $ABC \cong ABC'$ e $ABC' \cong A'B'C'$ se ne deduce che $ABC \cong A'B'C'$.

<u>Secondo caso</u>: Il punto D coincide con uno dei due estremi A e A'.
Poiché per ipotesi $CB \cong C'B'$ il triangolo CBC’ è isoscele sulla base CC’, pertanto $A\hat{C}B \cong A\hat{C}'B$ in quanto angoli alla base di un triangolo isoscele. I triangoli ABC e ABC’ sono congruenti per il primo criterio perché hanno $AC \cong AC_1'$; $BC \cong BC_1'$; $A\hat{C}B \cong A\widehat{C_1'}B$. Infine, come per il caso precedente, poiché ABC è congruente a ABC’ e quest’ultimo è congruente a A’B’C’ anche ABC è congruente a A’B’C’.

<u>Terzo caso</u>: Il punto D cade esternamente al segmento AB.
Come nel primo caso, i triangoli CAC’ è CBC’ sono isosceli sulla base CC’, pertanto $A\hat{C}C' \cong A\hat{C}'C$ e $B\hat{C}C' \cong B\hat{C}'C$. Per differenza di angoli congruenti si ottiene che $A\hat{C}B \cong A\hat{C}'B$
Infatti $A\hat{C}B \cong D\hat{C}B - D\hat{C}A \cong D\hat{C}'B - D\hat{C}'A \cong A\hat{C}'B$. Da ciò segue che i triangoli ABC e ABC’ sono congruenti per il primo criterio in quanto hanno rispettivamente congruenti due lati e l’angolo tra essi compreso. Come per i casi precedenti, se ABC è congruente a ABC’ è congruente anche a A’B’C’ ■

51 Due triangoli sono congruenti se hanno

a) tre lati congruenti V F
b) tre angoli congruenti V F
c) due lati e l’angolo compreso congruenti V F
d) due angoli e il lato in comune congruenti V F
e) un lato e l’angolo opposto congruenti V F

Esercizi sui criteri di congruenza dei triangoli e sui triangoli isosceli

52 Due triangoli equilateri sono congruenti se hanno lo stesso perimetro.

53 Dimostra che due triangoli equilateri che hanno in comune la base sono congruenti.

54 Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la mediana relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.

55 Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la bisettrice relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.

56 Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e un altro lato.

57 In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A prendi un punto D sul lato AB e un punto E sul lato AC, in modo che $BD \cong EC$, unisci C con D e B con E, sia $\{F\}=BE \cap DC$, dimostra che i triangoli BFA e CFA sono congruenti.

58 In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A, prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$, prolunga la base BC di un segmento BG, dalla parte di B, e di un segmento CF dalla parte di C, in modo che $BG \cong CF$. Dimostra che sono congruenti i triangoli ADG e AEF.

59 In un triangolo scaleno ABC sia AC>BC. Prolunga BC, dalla parte di C, di un segmento CD congruente ad AC e prolunga AC, dalla parte di C, si un segmento CE congruente a BC. Detto H il punto di intersezione della retta per AB con la retta per DE, dimostra che $AH \cong DH$.

60 In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A, prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$. Unisci D con C e prolunga il segmento DC, dalla parte di C di un segmento CF. Unisci E con B e prolunga il segmento EB dalla parte di B di un segmento BG congruente a CF. Dimostra che i triangoli AGD e AFE sono congruenti.

61 Dato il triangolo convesso non piatto $a\widehat{O}b$ si prenda un punto A sul lato Oa e un punto B sul lato Ob, in modo che $OA \cong OB$. Sia M il punto medio di OA e N il punto medio di OB, congiungi A con N e B con M, indica con P in punto di intersezione. Dimostra che sono congruenti i triangoli OBC e OAD e i triangolo AOP OPB.

62 Nel triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prendi un punto D sulla bisettrice CH dell'angolo al vertice C, indica con E il punto di intersezione della retta AD con BC e F il punto di intersezione di BD con AC. Dimostra che i triangoli FDA e EDB sono congruenti.

63 Siano ABC e ABD due triangoli isosceli aventi la base AB in comune e i vertici C e D situati da parti opposte rispetto ad AB. Dimostrare che $A\widehat{C}D \cong D\widehat{C}B$.

64 Sia P un punto interno al triangolo isoscele ABC di base AB e sia $AP \cong PB$. Si dimostri che CP appartiene alla bisettrice dell'angolo in C.

65 Due triangoli equilateri ABC e DBC hanno la base BC in comune e i vertici A e D situati da parti opposte rispetto alla base BC. Dimostra che i due triangoli sono congruenti.

66 Siano ABC e A'B'C' due triangoli congruenti. Si fissino su AC un punto P e su A'C' un punto P' tali che $AP \cong A'P'$. Si fissino su BC un punto Q e su B'C' un punto Q' tali che $BQ \cong B'Q'$. Si dimostri che $PQ \cong P'Q'$.

67 Due triangoli, che hanno un lato congruente e hanno congruenti anche i due angoli esterni al triangolo aventi per vertici gli estremi del lato congruente, sono congruenti.

68 Dato il triangolo ABC e un punto O esterno al triangolo, si unisca O con A, con B e con C. Si prolunghi ciascun segmento, dalla parte di O, dei segmenti $OA' \cong OA$, $OB' \cong OB$, $OC' \cong OC$ Dimostra che $ABC \cong A'B'C'$.

69 Siano LMN i punti medi dei lati del triangolo isoscele ABC, dimostra che anche LMN è isoscele.

70 Siano MN i punti medi dei lati congruenti AB e AC del triangolo isoscele ABC, dimostra che le mediane AM e AN sono congruenti.

71 Siano $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ due angoli consecutivi congruenti, sia OM la bisettrice dell'angolo $A\widehat{O}B$. Sulle semirette OC, OB, OM e OA si prendano rispettivamente i segmenti tutti congruenti tra di loro OC', OB', OM', OA'. Dimostrare che $A'M' \cong M'B', A'B' \cong B'C'$.

72 Sia OM la bisettrice dell'angolo $A\widehat{O}B$, sui lato dell'angolo $A\widehat{O}B$ si prendano i punti P e Q tali che $OP \cong OQ$. Sia C un punto qualsiasi della bisettrice OM. Dimostra che $CP \cong CQ$.

73* Sia ABC un triangolo. Sulla bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$ considera due punti D ed E tali che $AD \cong AB$ e $AE \cong AC$. Dimostra che $BE \cong DC$.

74* Si disegnino due triangoli congruenti ABC e A'B'C'. Sui lati congruenti AB e A'B', si considerino i punti D e D' in modo che $AD \cong A'D'$. Dimostrare che $C\hat{D}B \cong C'\hat{D}'B'$.

75* Si disegni un angolo $A\hat{V}B$ e la sua bisettrice VC. Da un punto E della bisettrice si tracci una retta che formi con la bisettrice due angoli retti. Questa retta interseca i lati dell'angolo nei punti A e B. Dimostrare che $AO \cong BO$.

76* Disegna il triangolo ABC, con AB>AC. Traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Dal punto

D traccia una semiretta che formi con la bisettrice stessa un angolo congruente all'angolo $A\hat{D}C$. Tale semiretta incontra AB nel punto E. Dimostra che CD e DE sono congruenti.

77 * Si disegnino i triangoli congruenti ABC e A'B'C'. Dimostrare che le bisettrici di due angoli congruenti sono congruenti.

78 * Sia ABC un triangolo, e sia AK la bisettrice dell'angolo in A. Da K si conduca una retta che formi due angoli retti con AK e che incontri la retta AB in D e la retta AC in E. Dimostrare che il triangolo ADE è isoscele.

79 * Si consideri il triangolo ABC. Si prolunghi il lato AB, dalla parte di B, di un segmento $BE \cong AB$ e il lato BC, dalla parte di B, di un segmento $BF \cong BC$; si congiunga E con F. Considerati il punto medio M di AC e il punto medio N di EF, dimostrare che B è sul segmento MN.

80 * Siano AB un segmento ed M il suo punto medio. Si disegni la retta r tale che M sia su r, e su di essa si individuino i segmenti congruenti MC ed MD, in semipiani opposti rispetto alla retta AB. Congiunti A con D e B con C, si dimostri che i triangoli AMD e MBC sono congruenti.

81 * Si disegnino due angoli consecuti e congruenti $a\hat{V}b$ e $b\hat{V}c$ e le rispettive bisettrici d ed e. Sulle semirette a e b si scelgano rispettivamente i punti A e B tali che $VA \cong VB$. Sulle bisettrici d e e si scelgano rispettivamente i punti C e D tali che $VC \cong VD$. Si congiungano A con C e B con D. Dimostrare che $V\hat{A}C \cong V\hat{B}C \cong V\hat{B}D$.

82 * Si disegni il triangolo ABC, con AB > AC, e si conduca la bisettrice AD dell'angolo in A. Da D si conduca la semiretta *a* che forma con la bisettrice *b* un angolo congruente a $A\hat{D}C$, e la semiretta *a* interseca il lato AB in E. Si dimostri che $CD \cong DE$.

83 * Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C; si prolunghino i lati AC e BC, dalla parte della base AB, di due segmenti AD e BE tali che $AD = BE$. Si dimostri che il punto $\{F\}=AE\cap BD$ appartiene alla bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$.

84 * Due triangoli isosceli ABC e CED e rettangoli in C sono tali che $\{C\}=ABC\cap CED$. Sapendo che l'angolo $B\hat{C}D$ è acuto, si dimostri che $AD = BE$.

85 * Disegnare due segmenti congruenti AB e DE. Costruire su essi due triangoli equilateri ABC e DEF. Si dimostri che i triangoli sono congruenti. Si può dimostrare ancora la congruenza se si costruiscono sui due segmenti due triangoli isosceli?

86 * Nel triangolo isoscele ABC, di base AB, prolunga i lati CA e CB dalla parte della base. La bisettrice dell'angolo supplementare di $\hat{A}$ incontra il prolungamento del lato BC nel punto E. La bisettrice dell'angolo supplementare di $\hat{B}$ incontra il prolungamento del lato AC nel punto F. Dimostra che $ABF = ABE$.

87 * Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia minore del lato obliquo. Prolunga il lato CA, dalla parte di A, di un segmento AE congruente alla differenza fra il lato obliquo e la base. Prolunga poi la base AB, dalla parte di B, di un segmento $BF \cong AE$. Congiungi F con C ed E. Dimostra che $CF \cong EF$.

88 * Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C; si prendano sui prolungamenti di AB due punti D ed E tali che $AD \cong BE$. Si dimostri che $ADC = BEC$ e $AEC \cong BDC$.

89 * Sui lati congruenti del triangolo isoscele ABC, di vertice C, disegna due segmenti congruenti CE e CF. Congiungi E con B, poi A con F; indica con D il loro punto d'intersezione. Dimostra che anche il triangolo ABD è isoscele.

90 * Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Si conducano le bisettrici degli angoli alla base e sia E il loro punto d'incontro. Dimostrare che il triangolo ABE è isoscele.

91 * Sui due lati obliqui del triangolo isoscele ABC, di base AB, disegna, esternamente al triangolo, i triangoli equilateri BCD e ACE. Congiungi A con D e B con E, poi indica con F il punto intersezione dei segmenti ottenuti. Dimostra che $AD = BE$ e che CF è bisettrice di $A\hat{C}B$.

92 * Disegna un triangolo isoscele ABC, di base BC e l'angolo acuto in A. Traccia le altezze BH e CK relative, rispettivamente, ai lati AC e AB e prolunga tali altezze, dalla parte di H e K, dei segmenti $HB' \cong BH$ e $KC' \cong CK$. Sia A' il punto d'intersezione della retta BC' con la retta B'C. Dimostra che $ABC \cong AC'B \cong AB'C$ e che il triangolo A'B'C' è isoscele.

93 * Siano dati due triangoli isosceli aventi ordinatamente congruenti un lato e la base. Dimostrare che i due triangoli sono congruenti.

94 * Si consideri un angolo $a\hat{O}b$; siano A, B due punti del lato *a* e siano C, D due punti del lato *b* tali che $OA \cong OC$ e $OB \cong OD$. Si congiungano A con D e B con C e sia E il punto di intersezione tra AD e BC. Si dimostri che il punto E appartiene alla bisettrice dell'angolo $a\hat{O}b$.

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 118, 119, 124, 125; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

►5. Congruenza dei poligoni

Ricordiamo che due poligoni sono congruenti se hanno lo stesso numero di lati ed hanno “ordinatamente” congruenti tutti i lati e tutti gli angoli corrispondenti.
Il seguente criterio di congruenza dei quadrilateri è una semplice applicazione del primo criterio di congruenza dei triangoli.
CRITERIO DI CONGRUENZA DEI QUADRILATERI
Due quadrilateri, aventi ordinatamente congruenti tre lati ed i due angoli tra essi compresi, sono congruenti. Di conseguenza hanno ordinatamente congruenti anche il rimanente lato ed i rimanenti due angoli.
Conseguenza diretta del primo e del secondo criterio di congruenza dei triangoli è il seguente criterio.
CRITERIO DI CONGRUENZA DEI QUADRILATERI
Due quadrilateri, aventi ordinatamente congruenti due lati consecutivi e tre angoli (adiacenti ai due lati congruenti), sono congruenti. Di conseguenza hanno ordinatamente congruenti anche il rimanente angolo ed i rimanenti due lati.
Conseguenza del primo e del terzo criterio di congruenza dei triangoli è il seguente criterio.
CRITERIO DI CONGRUENZA DEI QUADRILATERI.
Due quadrilateri sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti i quattro lati ed un angolo corrispondente. Di conseguenza hanno ordinatamente congruenti anche i rimanenti tre angoli.
CRITERI DI CONGRUENZA DEI POLIGONI
Due poligoni sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti tutti i lati e tutti gli angoli compresi, tranne tre elementi su cui non si fa alcuna ipotesi:
1) due angoli consecutivi ed il lato compreso;
2) due lati consecutivi e l’angolo compreso;
3) tre angoli consecutivi.
La dimostrazione di questi criteri è lasciata al lettore che potrà esercitarsi applicando i tre criteri di congruenza dei triangoli.

95 I triangoli ABC e A'B'C' hanno $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$. Sui lati AC e A'C', esternamente ai triangoli costruisci i triangoli ADC e A'D'C' in modo che $AD \cong A'D'$ e $DC \cong D'C'$. Dimostra che sono congruenti i quadrilateri ABCD e A'B'C'D'.

96 Dati i pentagoni congruenti ABCDE e FGHIL traccia le diagonali che uniscono le coppie di punti corrispondenti A, D e F, I. Dimostra che sono congruenti i quadrilateri ABCD e FGHI.

Quesiti dalle prove INVALSI

97 In un triangolo isoscele l’angolo al vertice è metà dell’angolo alla base. Quanto misurano gli angoli del triangolo?

A. 72°, 72°, 36° B. 30°, 60°, 90° C. 36°, 36°, 72° D. 90°, 45°, 45°

(*Prove invalsi 2005*)

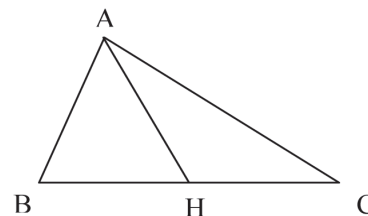
98 Osserva la figura. Se AB ≠ AC e BH=HC, che cosa rappresenta il segmento AH nel triangolo ABC?

A. Una altezza.
B. Una mediana.
C. Una bisettrice.
D. Un asse.

(*Prove invalsi 2006*)

99 Da un triangolo equilatero MNO di lato 6 cm viene tagliato via un triangolo equilatero di vertice in O e lato 2 cm. Il perimetro del quadrilatero rimanente è…

A. 12 cm B. 14 cm C. 16 cm D. 18 cm E. 20 cm

(*Prove invalsi 2003*)

MATEMATICA C3 - GEOMETRIA
3. RETTE PARALLELE

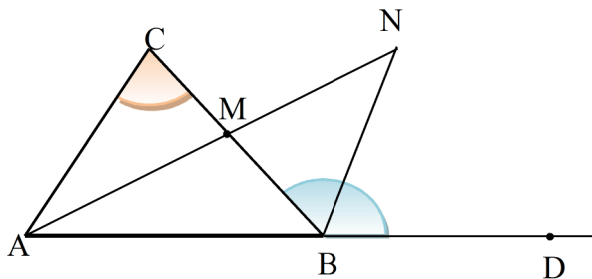
Intersection de deux parallèles Phot by: OliBac
Taken from: http://www.flickr.com/photos/olibac/3244014009/

Indice

►1. Primo teorema dell'angolo esterno

Iniziamo il capitolo con una proprietà che riguarda i triangoli, nota come **primo** teorema dell'angolo esterno. Ricordiamo che un angolo esterno di un poligono è un angolo che ha come vertice un vertice del poligono ed è adiacente ad un angolo interno.

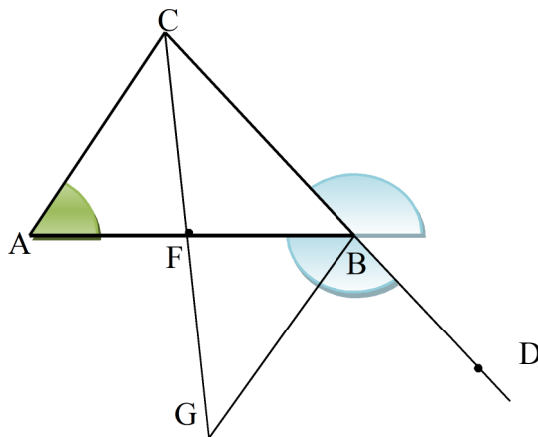
TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO. **In un triangolo un angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.**

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo. Prolunghiamo il lato AB dalla parte di B e prendiamo un qualsiasi punto D sul prolungamento. Vogliamo dimostrare che l'angolo $C\widehat{B}D$ è maggiore sia dell'angolo $C\widehat{A}B$ sia dell'angolo $A\widehat{C}B$. A tal fine prendiamo il punto medio del lato CB, lo chiamiamo M; uniamo A con M e prolunghiamo AM dalla parte di M, prendendo un punto N sul prolungamento in modo che AM sia congruente a MN; uniamo N con B.

Osserviamo che i triangoli AMC e BNM sono congruenti per il primo criterio, infatti:

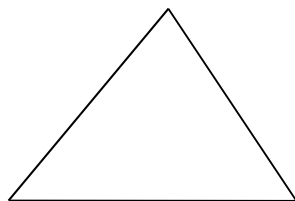
1. $CM \cong MB$ perché M è punto medio per costruzione,
2. $AM \cong MN$ per costruzione,
3. $C\widehat{M}A \cong B\widehat{M}N$ perché opposti al vertice.

Di conseguenza i restanti elementi dei due triangoli sono ordinatamente congruenti, in particolare $A\widehat{C}M \cong M\widehat{B}N$. Ma l'angolo $M\widehat{B}N$ è una parte propria dell'angolo esterno $C\widehat{B}D$ che risulta pertanto maggiore di esso e dell'angolo interno di vertice C.

Rimane ora da dimostrare che $C\widehat{B}D$ è anche maggiore di $C\widehat{A}B$.

Prolunghiamo il segmento CB dalla parte di B viene individuato un altro angolo esterno, che però è congruente al precedente: è anch'esso adiacente all'angolo interno di vertice B ed è opposto al vertice di $C\widehat{B}D$. Usiamo tale angolo ed una costruzione analoga alla precedente a partire dal punto medio F del segmento AB e dal punto G sul prolungamento di CF, con $CF \cong FG$ in modo da ottenere, dal confronto dei triangoli congruenti AFC e FGB, che l'angolo interno di vertice A è congruente all'angolo $F\widehat{B}G$ che è una parte propria dell'angolo esterno di vertice B.■

1 Vero Falso? In un triangolo:

a) Per ogni lato c'è un solo angolo esterno V F
b) Un angolo esterno è maggiore della somma degli angoli interni V F
c) L'angolo esterno non può essere acuto V F
d) L'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei tre angoli interni V F
e) L'angolo interno è minore di ciascuno degli angoli esterni non adiacenti V F
f) L'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti V F

2 Disegna per ciascun vertice del triangolo almeno un angolo esterno

3 Nel triangolo isoscele ABC di base AB prolunga il lato CB fino a un punto D. Dimostra che: . $A\widehat{B}D > A\widehat{C}B$, $C\widehat{B}A > A\widehat{D}B$, $C\widehat{A}B > B\widehat{A}D$, C

4 Internamente a un triangolo ABC prendi un punto D. Congiungi D con A, con B e con C. Il prolungamento di AE incontra il lato BC nel punto E. Dimostra che: $B\widehat{D}E > B\widehat{A}D$, $B\widehat{D}C > B\widehat{A}C$, $A\widehat{E}B > D\widehat{C}B$.

5 Nel triangolo ABC traccia la bisettrice AP dell'angolo in A. Dimostra che nel triangolo APC, l'angolo in P è maggiore dell'angolo in A.

6 Dimostra che la somma di due angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto. (Considera l'angolo esterno a uno dei due angoli).

7 Dimostra che un triangolo non può avere più di due angoli retti.

8 Dimostra che un triangolo non può avere due angoli ottusi.

9 Dimostrare che gli angoli alla base di un triangolo isoscele devono essere acuti.

►2. Rette perpendicolari

Ricordiamo che due rette giacenti su uno stesso piano si dicono perpendicolari se si incontrano dividendo il piano in quattro angoli congruenti. In realtà è sufficiente sapere che uno dei quattro angoli che si vengono a formare è retto, per concludere che sono tutti retti.

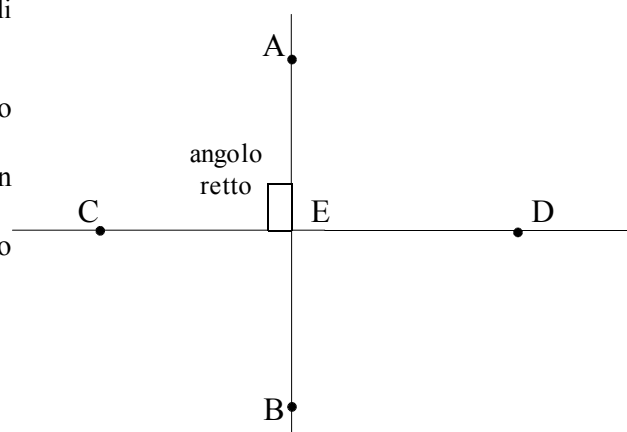
PROPRIETÀ. **Siano AB e CD due rette incidenti di intersezione E, se risulta che l'angolo $A\widehat{E}C$ è retto, allora sono retti anche gli angoli $A\hat{E}D$, $B\hat{E}C$ e $B\hat{E}D$.**

Se due rette incidenti formano un angolo retto allora tutti gli angoli che si formano sono retti

Dimostrazione

L'angolo $A\widehat{E}D$ è retto perché adiacente a un angolo retto;

l'angolo $D\widehat{E}B$ è retto perché opposto al vertice a un angolo retto;

l'angolo $C\widehat{E}B$ è retto perché adiacente a un angolo retto■

L'esistenza e l'unicità della perpendicolare sono assicurate dal seguente teorema.

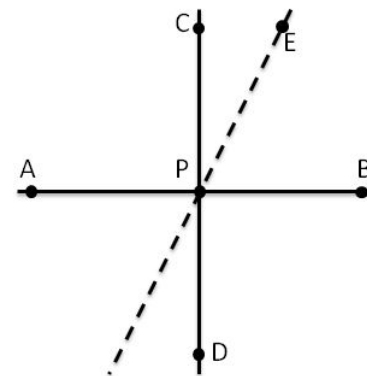
TEOREMA. **Nel piano, data una retta ed un punto, esiste ed è unica la retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto assegnato.**

Dimostrazione

Per la dimostrazione, distinguiamo due casi.

Primo caso: il punto appartiene alla retta.

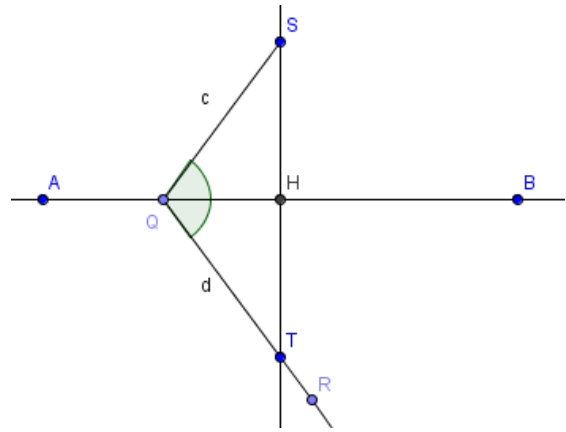
Sia AB una retta del piano e sia P un suo punto. Allora se tracciamo la bisettrice di uno dei due angoli piatti $A\widehat{P}B$, questa è certamente perpendicolare ad AB, in quanto i due angoli che si vengono a formare sono la metà di un angolo piatto e pertanto sono retti.

Prolungando questa bisettrice, si viene a formare una retta CD perpendicolare ad AB. Supponiamo per assurdo che la retta CD non sia l'unica perpendicolare ad AB passante per il punto P ma che ne esista un'altra. Detto E un punto su tale ipotetica retta distinto da P, se E appartenesse anche alla retta CD, allora PE coinciderebbe con CD, quindi PE non sarebbe distinta dalla retta CD; se invece E non appartenesse a CD, unendo E con P, si verrebbero a formare due angoli $A\widehat{P}E$ e $E\widehat{P}B$ di cui uno acuto ed uno ottuso, e quindi la retta EP non risulterebbe perpendicolare ad AB.

Secondo caso: il punto non appartiene alla retta.

Sia AB una retta nel piano e sia S un punto del piano non appartenente ad essa. Costruiamo la perpendicolare ad AB passante per S e dimostriamo che è unica.

Possiamo prendere un punto Q appartenente ad AB e congiungere S con Q. Se gli angoli $A\widehat{Q}S$ e $S\widehat{Q}B$ sono retti, abbiamo già trovato la perpendicolare. Altrimenti, vuol dire che gli angoli $A\widehat{Q}S$ e $S\widehat{Q}B$ sono uno acuto ed uno ottuso. Tracciamo la semiretta QR, di origine Q e giacente nel semipiano individuato da AB non contenente il punto S, che divide il semipiano in due angoli, $A\widehat{Q}R$ e $R\widehat{Q}B$, rispettivamente congruenti a $A\widehat{Q}S$ e $S\widehat{Q}B$. Prendiamo un punto T su tale semiretta in modo che il segmento QT sia congruente a QS. Uniamo S con T e chiamiamo H il punto d'intersezione tra ST ed AB. Allora il triangolo QTS è isoscele sulla base ST, ed il segmento QH è la bisettrice dell'angolo al vertice $S\widehat{Q}T$, che risulta pertanto essere anche mediana ed altezza relativa alla base ST. Dunque gli angoli $S\widehat{H}Q$ e $T\widehat{H}Q$ sono retti, e quindi la retta ST è perpendicolare ad AB.

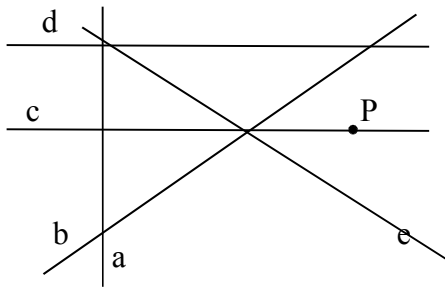
Abbiamo quindi trovato la perpendicolare ad AB passante per S. Per dimostrare che è unica possiamo ricorrere al ragionamento fatto nel primo caso, dove ora H è il punto P della dimostrazione precedente.

Il teorema è pertanto dimostrato.

10 Vero Falso?

a) Dati un punto P e una retta r esiste sempre una retta perpendicolare a r e passante per P V F
b) Dati un punto P e una retta r esistono infinite rette passanti per P e perpendicolari a r V F
c) L'unicità della perpendicolare per un punto a una retta è un assioma V F
d) L'unicità della parallela per un punto a una retta è un assioma V F

11 Una retta a è perpendicolare a una retta b, la quale a sua volta è perpendicolare a una terza retta C, le rette a e c sono

[A] parallele [B] perpendicolari [C] né parallele né perpendicolari

12 Disegna le rette passanti per P e perpendicolari alle altre rette presenti nel disegno

13 Per ognuno dei punti di intersezione delle tre rette traccia la perpendicolare a ciascuna retta

14 Dimostra che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

►3. Rette parallele

Secondo la definizione di Euclide, due rette nel piano sono parallele se non hanno punti in comune.
In maniera più moderna il concetto di parallelismo è interpretato come l'avere la stessa direzione.

Si può anche dare una formulazione che unifichi le due definizioni precedenti; si deve però ricorrere al concetto di distanza: due rette nel piano sono parallele se mantengono sempre la stessa distanza. Se la distanza è nulla, le due rette sono coincidenti.

Noi utilizzeremo la seguente:

DEFINIZIONE. Due rette giacenti nello stesso piano si dicono **parallele** se sono coincidenti oppure non s'incontrano mai.

Assumiamo dunque questa come definizione di parallelismo. Abbiamo però bisogno di precisare il concetto di distanza.

Dati due punti P e Q, la distanza tra P e Q è la lunghezza del percorso più breve che unisce i due punti. Questo concetto è valido anche se si riferisce alle distanze tra due città che si trovano negli stradari: sono riportate le lunghezze dei percorsi minimi tra tutte le strade alternative che collegano due città. Naturalmente, nel piano, ove si "dispone" di tutti i punti da poter "attraversare", il percorso più breve che collega due punti P e Q è il segmento PQ; quindi nella geometria euclidea assumiamo come distanza tra due punti la lunghezza del segmento avente per estremi i due punti.

Se vogliamo parlare di distanza tra due insiemi di punti, allora va considerato il percorso più breve tra tutti i percorsi che collegano un qualsiasi punto del primo insieme con un qualsiasi punto del secondo: in pratica la distanza è la lunghezza del più piccolo segmento tra tutti quelli che collegano i due insiemi di punti.

Nel caso particolare di un punto A ed una retta BC, se il punto appartiene alla retta allora la distanza di A da BC è uguale a zero, altrimenti si considera come distanza la lunghezza del segmento AH, dove H è il punto in cui la perpendicolare a BC passante per A interseca la stessa retta BC: il motivo si intuisce in base a quanto detto, ma risulterà chiaro più avanti, quando affronteremo lo studio delle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo.

Analogamente, come distanza tra due rette parallele si assume la lunghezza di un qualunque segmento che unisce il punto di una delle due rette con il piede della perpendicolare mandata da esso sull'altra retta. Affermare che tali segmenti sono tutti congruenti è un modo più preciso per dire che le due rette *mantengono sempre la stessa distanza*.

Ricordiamo la versione "moderna" del **V Postulato di Euclide:** *dati una retta **r** ed un punto **P**, allora esiste una ed una sola retta parallela ad **r** e passante per **P**.*

PROPOSIZIONE. **Se due rette nel piano sono perpendicolari alla stessa retta, esse sono parallele tra loro.**

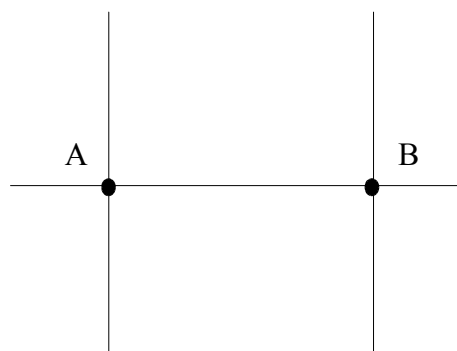
Dimostrazione. Sia *r* una retta, e siano *s* e *t* due rette, entrambe perpendicolari ad *r*.
Se *s* e *t* intersecano *r* nello stesso punto P, allora per il teorema precedente necessariamente coincidono, e dunque sono parallele per la nostra definizione di parallelismo.

Consideriamo ora il caso in cui *s* e *t* intersecano *r* in due punti distinti, rispettivamente A e B. Supponendo per assurdo che *s* e *t* si intersechino in un punto C, risulterebbero due distinte rette passanti per C e perpendicolari alla stessa retta, assurdo per il teorema precedente. Dunque deve risultare *s//t*. C.V.D.

Analoghe proprietà valgono per rette parallele e per rette incidenti qualunque. Precisamente:

PROPOSIZIONE. **Siano date due rette parallele, se una terza retta è parallela ad una delle due, è parallela anche all'altra; inoltre, ogni retta che interseca una delle due, interseca anche l'altra.**

Dimostrazione. Siano *a*, *b*, *c* tre rette, con *a//b*. Se *a* coincide con *b*, la tesi è banale. Supponiamo quindi che *a* e *b* non abbiano punti in comune.

Vogliamo dimostrare che se *c//a* allora *c//b*.
La tesi è banale se *c* coincide con *a* oppure con *b*.
Supponiamo dunque che *c* sia distinta da entrambe.

Ricordiamo il V Postulato di Euclide: *dati una retta **r** ed un punto **P**, allora esiste una ed una sola retta parallela ad **r** e passante per **P**.*

Dimostriamo che se *c* non ha punti in comune con *a*, allora non può avere punti in comune neppure con *b*. Se per assurdo *c* avesse un punto P in comune con *b*, allora esisterebbero due rette distinte passanti per P entrambe parallele alla stessa retta *a*, cosa che contraddice il quinto postulato di Euclide.

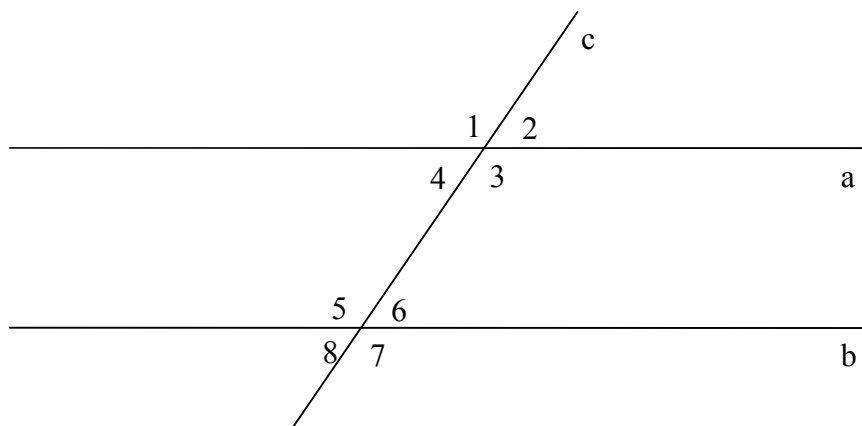
Se b//a e c//a, per il punto P passerebbero due parallele ad a; il che contraddice il V postulato di Euclide

Dimostriamo ora che se *c* interseca la retta *a* allora interseca anche la retta *b*. Detto Q il punto d'intersezione tra le rette *a* e *c*, se per assurdo *c* non intersecasse la retta *b*, cioè se fosse *c//b*, allora *a* e *c* sarebbero due rette distinte passanti per Q entrambe parallele alla retta *b*, contrariamente *a* quanto dice il quinto postulato di Euclide. C.V.D.

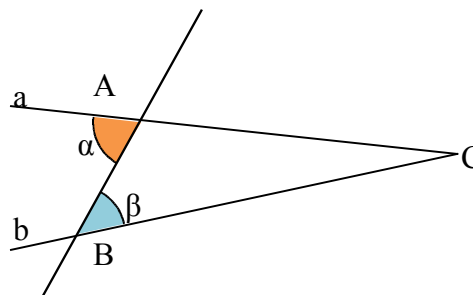
Osservazione. La proposizione precedente rappresenta una sorta di proprietà transitiva del parallelismo. In realtà si è scelto di considerare parallele sia rette nel piano che non hanno punti in comune sia rette coincidenti proprio per fare in modo che la relazione di parallelismo sia una relazione di equivalenza: riflessiva, simmetrica, transitiva. Con la definizione di parallelismo data da Euclide, al contrario, sarebbe stata solo simmetrica, ma non riflessiva né transitiva. Per convincersi della non transitività, basta considerare tre rette *a*, *b*, *c* con *a* e *c* coincidenti e *b* parallela ad entrambe e distinta da esse: allora *a//b* e *b//c*, ma *a* e *c* non sono parallele secondo la definizione di Euclide.

Rette parallele tagliate da una trasversale

Due rette parallele *a* e *b* vengono intersecate da una retta *c* (detta trasversale) che non è parallela ad esse,

- se la retta *c* è perpendicolare (ad entrambe), si vengono a formare otto angoli retti;
- se la retta c non è perpendicolare ad esse, si vengono a formare otto angoli, di cui quattro acuti e quattro ottusi, rispetto alla posizione che occupano hanno i seguenti nomi:

- Gli angoli 1 e 5, gli angoli 2 e 6, gli angoli 3 e 7, gli angoli 4 e 8 si dicono **corrispondenti** (si dicono corrispondenti perché occupano posizioni analoghe da una parallela all'altra);
- gli angoli 3 e 5, gli angoli 4 e 6 si dicono **alterni interni** (si dicono alterni perché occupano posizioni opposte rispetto alla trasversale; interni perché si trovano all'interno delle due parallele);
- gli angoli 1 e 7, gli angoli 2 e 8 si dicono **alterni esterni** (alterni perché sono opposti rispetto alla trasversale; esterni perché si trovano all'esterno della zona tra le due parallele);
- gli angoli 3 e 6, gli angoli 4 e 5 si dicono **coniugati interni** (si dicono coniugati perché stanno dalla stessa parte rispetto alla trasversale);
- gli angoli 1 e 8, gli angoli 2 e 7 si dicono **coniugati esterni**.
- Inoltre 1 e 3, 2 e 4, 5 e 7, 6 e 8 sono **opposti al vertice**.

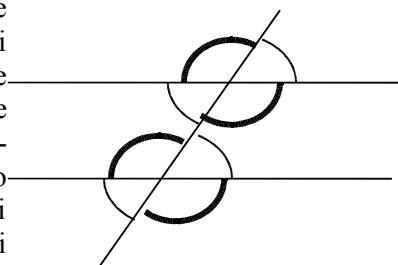
TEOREMA DELLE PARALLELE. **Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti allora sono parallele.**

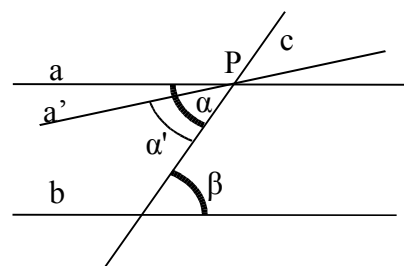
Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che le rette *a* e *b* non siano parallele. Se non sono parallele si incontreranno in un punto C. Allora si viene a formare il triangolo ABC. Per il teorema dell'angolo esterno del triangolo, l'angolo esterno α è maggiore dell'angolo interno β. Questa conseguenza contraddice l'ipotesi del teorema, secondo la quale gli angoli alterni interni α e β sono congruenti. Allora abbiamo sbagliato a negare la tesi, che perciò risulta vera■

Possiamo generalizzare il teorema precedenti ad altri casi.

CRITERIO DI PARALLELISMO. **Se due rette tagliate da una trasversale formano:**

- **angoli alterni interni o alterni esterni congruenti *oppure***
- **angoli corrispondenti congruenti *oppure***
- **angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari**

allora sono parallele.

Dimostrazione. Tenendo conto che due angoli opposti al vertice sono congruenti e due angoli adiacenti sono supplementari, se risulta che due angoli corrispondenti qualsiasi sono congruenti, allora i quattro angoli acuti sono tutti congruenti ed i quattro angoli ottusi sono congruenti, e quindi anche angoli alterni interni pertanto per il teorema precedente le rette sono parallele. Analogamente, se risultano supplementari due qualsiasi angoli coniugati (interni o esterni) risulta sempre che i quattro angoli acuti sono tutti congruenti tra di loro ed i quattro angoli ottusi congruenti tra di loro, pertanto gli angoli alterni interni sono congruenti e, sempre per il teorema precedente, le due rette a e b sono parallele■

TEOREMA INVERSO DELLE PARALLELE. **Se due rette sono parallele allora formano con una trasversale qualsiasi due angoli alterni interni congruenti.**

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che esista una coppia di angoli alterni interni α e β per i quali risulti che α>β. Per il punto P, vertice dell'angolo α si potrà allora tracciare una retta a' in modo che l'angolo da essa formato α' sia congruente a β. Ne segue che a' e b sono parallele perché formano angoli alterni interni congruenti. Allora esisterebbero due rette distinte, a e a', passanti per lo stesso punto P entrambe parallele alla retta b. Questa conclusione contraddice il V postulato di Euclide, secondo il quale per un punto esterno a una retta passa un'unica parallela. Da questa contraddizione possiamo concludere che abbiamo sbagliato a supporre falsa la tesi, in altre parole la tesi è vera■

In generale possiamo enunciare il seguente

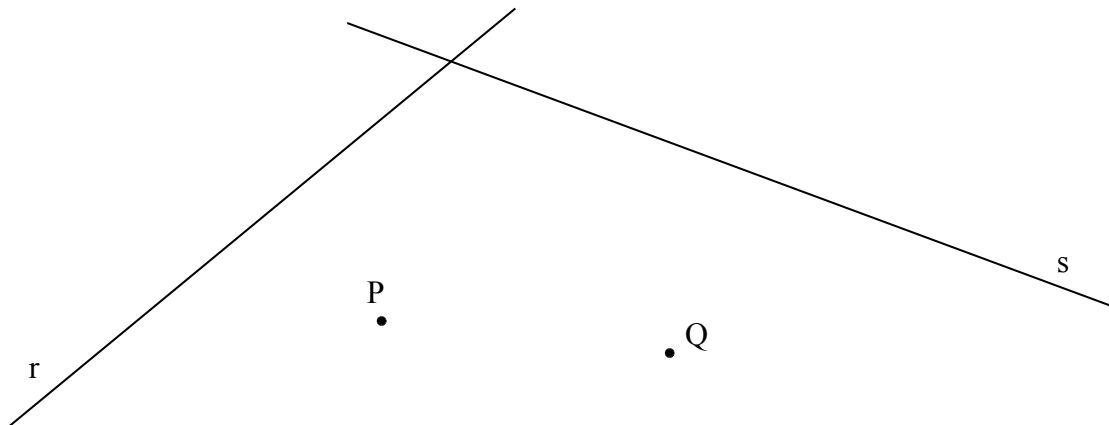
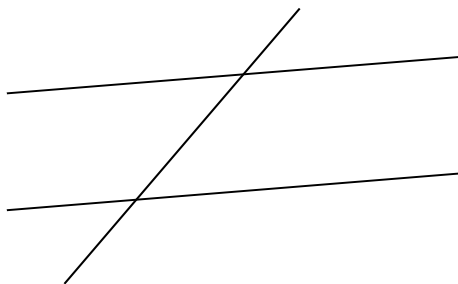
TEOREMA. **Se due rette sono parallele allora formano con una trasversale**

- angoli alterni interni o alterni esterni congruenti;
- angoli corrispondenti congruenti;
- angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che sono congruenti gli angoli alterni interni formati da due parallele tagliate da una trasversale. Tenendo conto che gli angoli opposti al vertice sono congruenti e gli angoli adiacenti sono supplementari, si possono dedurre facilmente tutte le tesi di questo teorema.

15 Vero o Falso?

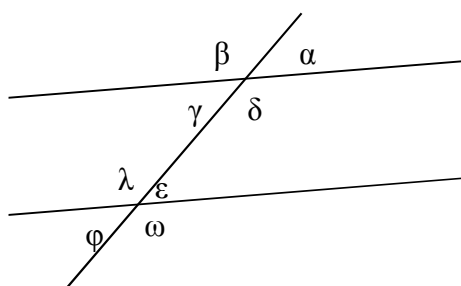
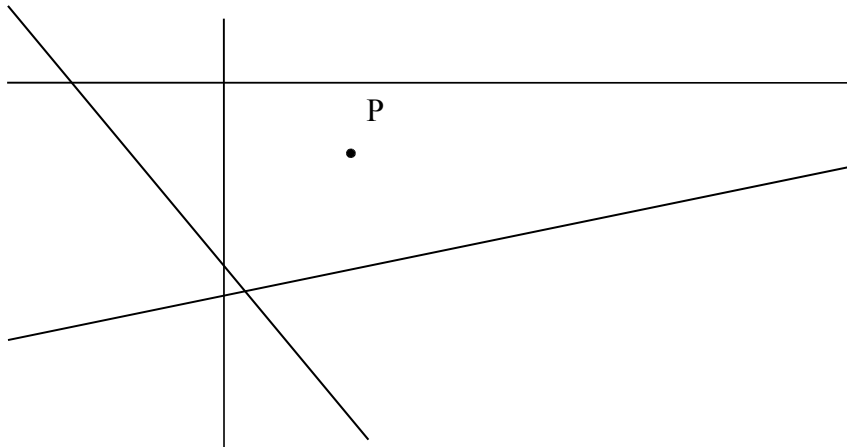
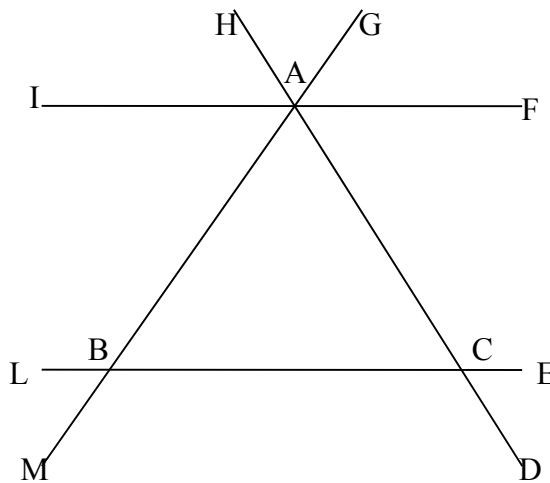
a) Due rette parallele tagliate da una trasversale formano quattro angoli alterni interni V F
b) Gli angoli corrispondenti sono a due a due interni o esterni V F
c) Gli angoli interni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale V F
d) Gli angoli esterni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale V F
e) Due rette parallele possono anche coincidere V F
f) La relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza V F
g) Due rette distinte hanno sempre un punto in comune V F
h) Una retta che incontra due rette parallele forma angoli alterni interni supplementari V F
i) Per ogni retta è possibile tracciare una sola retta parallela V F
j) Se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni allora sono parallele V F
k) Nel ragionamento per assurdo si nega l'ipotesi per dimostrare che la tesi è vera V F
l) Ragionando per assurdo si nega la tesi e si ottenere una contraddizione con l'ipotesi V F

16 Nella seguente figura disegna una parallela e una perpendicolare alla retta r passanti per P, una parallela e una perpendicolare a s passanti per Q.

17 Nella seguente figura sono state tracciate due rette parallele e una trasversale indica con un arco gli angoli corrispondenti interni

18 Nella seguente figura sono state tracciate due rette parallele e una trasversale, sapendo che $\alpha=\frac{1}{3}\pi$, dove π è l'angolo piatto, indica che fazione dell'angolo piatto sono gli altri angoli:

α = … β = …

γ = … δ = …

ε = … λ = …

φ = … ω= …

19 Disegna per il punto P le rette parallele alle altre

20 Nella seguente figura ABC è un triangolo isoscele, IF è parallela a BC. Individua tutti gli angoli congruenti all'angolo $A\widehat{B}C$

21 Completare ipotesi e tesi e mettere le parti della dimostrazione nell'ordine corretto:

In un triangolo ABC, isoscele su base AB, si prendano rispettivamente su AC e BC i punti D ed E equidistanti da C . Indicata con S la proiezione di D su BC e con U quella di E su AC, dimostrare che il segmento US è parallelo ad AB.

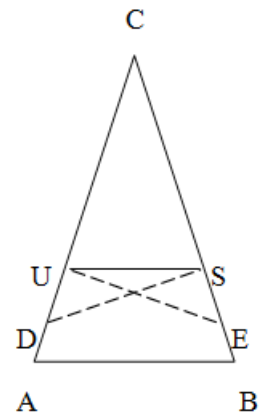
Ipotesi: $AC \cong ...$ $D \in AC$; $E \in ...$ $CD \cong ...$
$S \in BC$ $DS \perp BC$ $U \in ...$ $EU \perp ...$

Tesi: $US \parallel AB$

PARTE 1: Il triangolo CSU è isoscele su base SU perché ………………………………………… … … … … … .
quindi risulta $C\hat{U}S$ ... $C\hat{S}U$.

PARTE 2) : I triangoli CDS e CEU hanno : l'angolo in $\hat{C}$ in comune, CD ... CE per …………, $D\hat{S}C$ ... ……… perché angoli……………………, quindi tali triangoli sono congruenti per il ……………………, ne segue CS ... CU .

PARTE 3) : Applicando il teorema sulla somma degli angoli interni ai triangoli ABC e CUS, si ha che $C\hat{U}S + C\hat{S}U$ ... $C\hat{A}B$ + CBA perché supplementari dello stesso angolo $\hat{C}$, ed essendo $\hat{A}$ ... B perché……………………………ed essendo $C\hat{U}S$ ……… perché……………………., risulta che $C\hat{A}B$ ... $C\hat{U}S$ perché…………………… .

PARTE 4) : Gli angoli $C\hat{A}B$ e $C\hat{U}S$ (congruenti perché dimostrato) sono angoli …………………. rispetto alle rette AB e US tagliate dalla trasversale …………, quindi le rette AB e US sono parallele.

Dimostra le seguenti affermazioni.

22 Date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli corrispondenti (o alterni interni o alterni esterni) sono parallele.

23 Date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli coniugati interni (o coniugati esterni) sono perpendicolari.

24 Nel triangolo isoscele ABC traccia una parallela alla base AB, che incontra i lati obliqui in D ed E, dimostra che anche DCE è un triangolo isoscele.

25 Se due rette r e s sono incidenti allora lo sono anche due qualsiasi rette u e v, con u parallela a r e v parallela a s.

26 Sia M il punto medio del segmento AB. Sia r una retta che incontra AB in M. Sulla retta r da parti opposte rispetto a M prendi due punti C e D in modo che $AC // BD$.

27 Dimostra che $AC \cong BD$. Dal vertice C di un triangolo isoscele ABC conduci la parallela alla base AB. Dimostra che tale parallela è bisettrice dell'angolo esterno in C al triangolo.

28 Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Sia r la semiretta di origine C bisettrice dell'angolo formato dal prolungamento di BC e dal lato AC. Dimostra che la retta per AB è parallela a r.

29 Dato il triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prolunga la base AB dalla parte di A di un segmento AD. Sia E un punto interno all'angolo $D\widehat{A}C$ in modo che $E\widehat{A}D \cong C\widehat{A}B$. Dimostra che $EA // CB$.

30 Sia ABC un triangolo equilatero. Traccia una parallela al lato AB che incontra il lato BC in D e AC in E. Dimostra che anche il triangolo CDE è equilatero.

31 Da ciascun vertice di un triangolo ABC traccia la parallela al lato opposto. Detti D, E, F i punti di intersezione delle parallele dimostra che il triangolo DEF ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC.

32 Sia AD la bisettrice dell'angolo in A del triangolo ABC. Dal punto D traccia la parallela al lato AB, essa incontra il lato AC in E. Dimostra che il triangolo EDC ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC. Dimostra anche che ADE è un triangolo isoscele.

33 In un triangolo ABC rettangolo in A traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa. Dimostra che il triangolo ABH ha gli angoli congruenti a quelli di ABC.

34 Sulla base BC di un triangolo isoscele ABC prendi un punto D e traccia da esso la perpendicolare *p* alla base. La suddetta perpendicolare incontra il lato AB in E e il lato AC in F. Dimostra che il triangolo AFE è isoscele.

35 In un triangolo ABC traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Da un punto N del lato AC traccia la parallela alla bisettrice AD, essa incontra che retta per AB in E e la retta per BC in F. Dimostra che AEN è un triangolo isoscele. Dimostra che ADC e NFC hanno angoli congruenti.

36 In un triangolo ABC sia E il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo in B con il lato AC, Sia D un punto del lato AB tale che $DE \cong DB$. Dimostra che DE è parallelo a BC.

37 In un triangolo ABC traccia le bisettrici agli angoli nei vertici B e C. Sia D il punto di intersezione delle bisettrici. Da D traccia la parallela al lato BC e indica con E ed F i punti di intersezione di questa parallela con i lati rispettivamente AB e AC. Dimostra che $FE \cong EB + FC$.

38 Dato il triangolo ABC prolunga il lato AB dalla parte di A di un segmento AD congruente ad AB, prolunga poi il lato AC dalla parte di A di un segmento AE congruente ad AC. Dimostra che DE è parallelo a BC.

39 Sia AM la mediana di un triangolo ABC. Si prolunghi AM dalla parte di M di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che CD è parallelo ad AB.

40 Due rette parallele tagliate da una trasversale formano otto angoli, uno di essi è 1/3 dell'angolo retto. Determina le misure degli altri angoli.

41 Siano α e β due angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è parallela alla bisettrice di β.

42 Siano α e β due angoli corrispondenti formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è perpendicolare alla bisettrice di β.

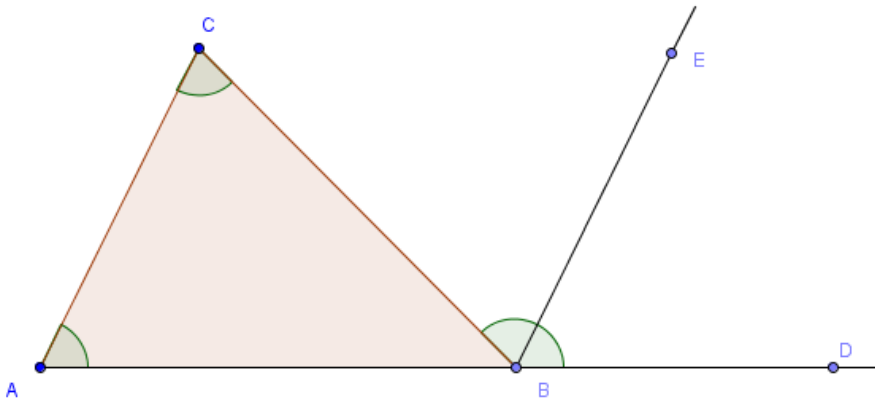
43 Disegna due segmenti AB e CD disposti in modo che si incontrino nel loro punto medio comune M. Congiungi A con D e B con C, dimostra che AD è parallelo a CB.

44 Disegna un angolo acuto $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi l'asse del segmento OP. Indica con Q e R i punti di intersezione dell'asse rispettivamente con la semiretta a e la semiretta b. Dimostra che OQ è parallelo a RP.

45 Disegna un angolo convesso $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi le perpendicolari PR e PQ rispettivamente alle semirette a e b. Dimostra che c è asse del segmento QR.

►4. Somma degli angoli interni di un triangolo

Possiamo ora a dimostrare il secondo teorema dell'angolo esterno di un triangolo.

TEOREMA. **In un triangolo un angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti.**

Dimostrazione: Sia ABC un triangolo e sia $C\widehat{B}D$ un angolo esterno. Tracciamo la semiretta $BE // AC$ che divide l'angolo $C\widehat{B}D$ in due parti, $C\widehat{B}E$ e $E\widehat{B}D$. L'angolo $C\widehat{B}E$ risulta congruente all'angolo $A\widehat{C}B$ in quanto i due angoli sono alterni interni rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale CB; analogamente l'angolo $E\widehat{B}D$ risulta congruente all'angolo $C\widehat{A}B$ in quanto i due angoli sono corrispondenti rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale AD. Dunque $C\widehat{B}D$ è congruente alla somma degli angoli interni di vertici A e C.C.V.D.

COROLLARIO. **La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto.**

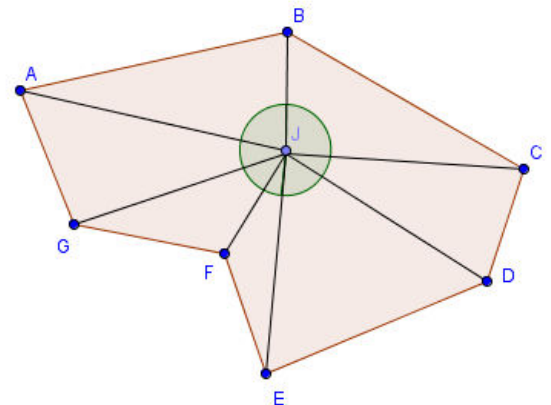
Dimostrazione: Dalla figura precedente $A\widehat{B}D \cong A\widehat{B}C + C\widehat{B}E + E\widehat{B}D = A\widehat{B}C + B\widehat{C}A + C\widehat{A}B$, pertanto la somma degli angoli interni è congruente all'angolo piatto ABD.

COROLLARIO. **Un triangolo non può avere più di un angolo retto e/o ottuso, dunque necessariamente almeno due angoli sono acuti. Di conseguenza, gli angoli alla base di un triangolo isoscele devono essere acuti.**

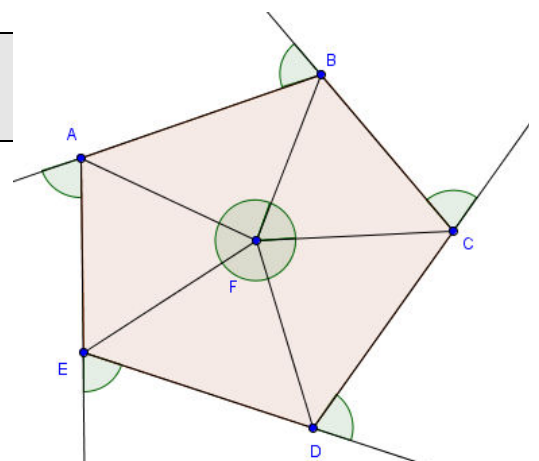
Somma degli angoli interni di un poligono

TEOREMA. **Dato un poligono P di n lati, la somma degli angoli interni di P è (n – 2) angoli piatti.**

Dimostrazione :

Infatti, dato un qualunque poligono (anche concavo) di *n* lati, scelto un opportuno punto interno in modo che, congiunto con ciascun vertice, il poligono resti diviso in *n* triangoli, si può osservare che la somma degli angoli interni del poligono è data dalla somma degli angoli interni di *n* triangoli meno l'angolo giro al centro, in figura l'angolo J.

TEOREMA. **La somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono convesso, indipendentemente dal numero dei lati, è congruente ad un angolo giro.**

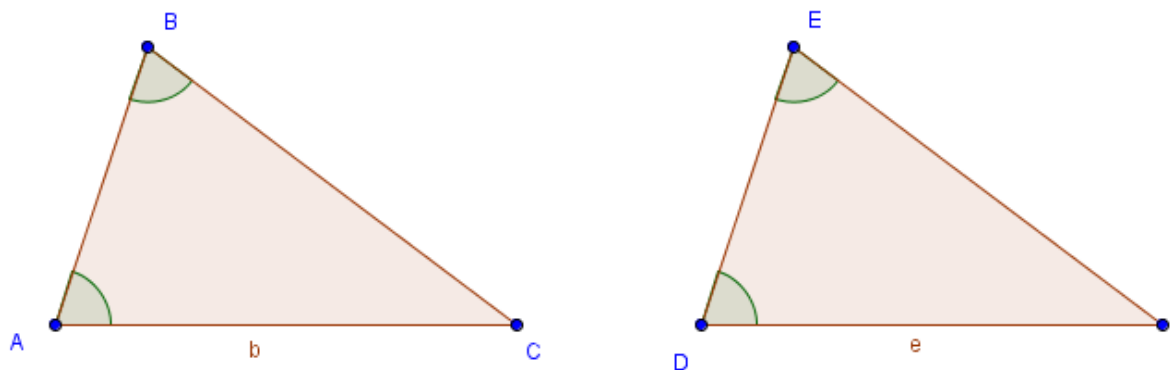
Dimostrazione:

Ogni angolo esterno è adiacente ad un angolo interno, per cui se si hanno *m* lati e quindi *m* vertici la somma degli angoli interni e degli angoli esterni è pari ad *m* angoli piatti; essendo (*m* – 2) angoli piatti la somma degli angoli interni, sarà di due angoli piatti (quindi un angolo giro) la somma degli angoli esterni.

46 Vero o Falso?

a) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a un angolo esterno V F
b) La somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente a 3 angoli piatti V F
c) La somma degli angoli esterni di un pentagono è congruente a 5 angoli piatti V F
d) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a due angoli retti V F
e) Un triangolo isoscele non può avere un angolo ottuso V F

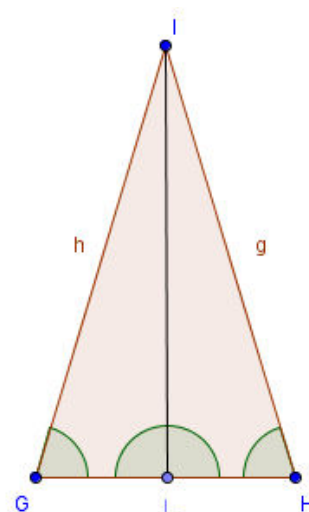
►5. Generalizzazione dei criteri di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno rispettivamente due angoli congruenti, allora anche i terzi angoli saranno congruenti nei due triangoli, in quanto supplementari della somma di angoli congruenti.
Dunque, se due triangoli hanno congruenti un lato e due angoli, anche se il lato congruente non è compreso tra i due angoli congruenti, risultano congruenti. Precisamente, vale la seguente proposizione.

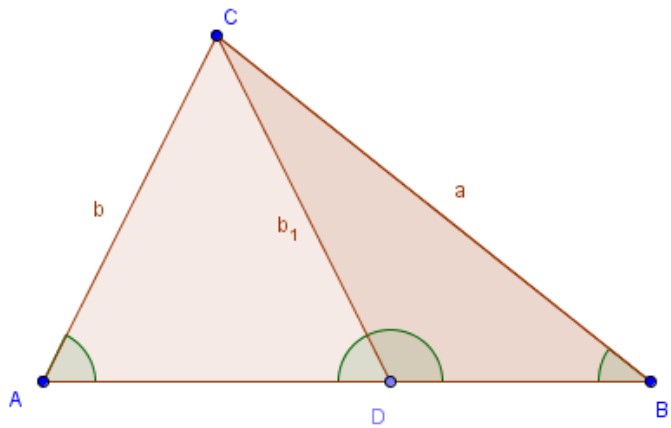
2° CRITERIO DI CONGRUENZA GENERALIZZATO. **Due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti una coppia di lati e due coppie di angoli ugualmente posti rispetto ai lati congruenti.**

Dimostrazione:
Il caso in cui il lato congruente è compreso tra gli angoli congruenti è stato già esaminato ed utilizzato per la dimostrazione di varie proprietà. Ora esaminiamo l'altro caso.
In figura abbiamo rappresentato due triangoli, ABC e DEF che hanno per ipotesi i lati $AC \cong DF$ e gli angoli $B\widehat{A}C \cong E\widehat{D}F$ e $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$. I due triangoli risultano congruenti.
La tesi segue dal fatto che deve risultare $B\widehat{C}A \cong E\widehat{F}D$, in quanto tali angoli sono supplementari alla somma di angoli congruenti per ipotesi. Ci si riconduce quindi al caso del secondo criterio di congruenza già dimostrato in precedenza.

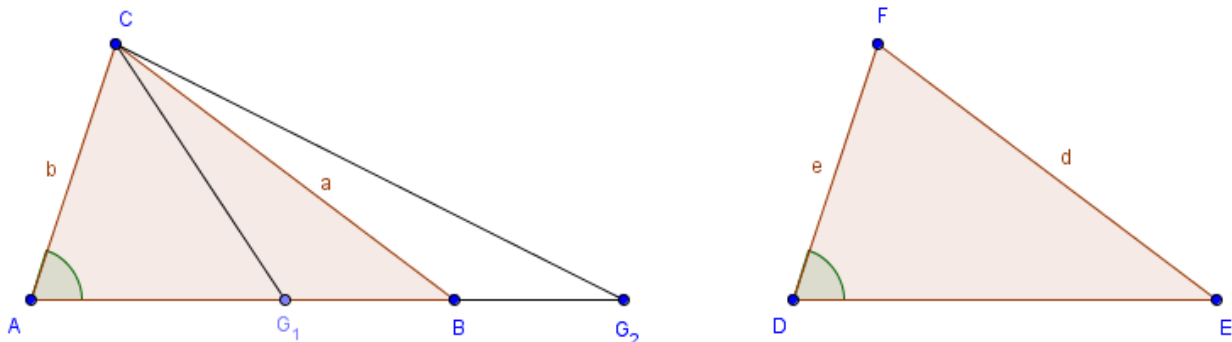
Riprendiamo una proprietà dei triangoli isosceli che abbiamo enunciato ma non abbiamo dimostrato:

PROPOSIZIONE. **In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.**

Ipotesi: $IG \cong IH$, $I\widehat{G}H \cong I\widehat{H}G$, $IL \perp GH$.
Tesi: $G\hat{I}L \cong H\hat{I}L$, $GL \cong LH$
Dimostrazione:
I triangoli GLI e LHI sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, avendo congruenti un lato e due angoli. Di conseguenza, i restanti elementi sono ordinatamente congruenti, in particolare $GL \cong LH$ e $G\hat{I}L \cong H\hat{I}L$ ■

Osservazione

Dall'esame dei primi tre criteri di congruenza dei triangoli, nonché dalla generalizzazione del secondo criterio, si potrebbe essere indotti a pensare che due triangoli sono congruenti se hanno tre coppie di elementi rispettivamente congruenti, se almeno una delle tre coppie di elementi è costituita da lati.

In realtà, il primo criterio non si può generalizzare come il secondo. Basta pensare alla figura seguente: ADC è un triangolo isoscele, B è un punto sul prolungamento della base AD. Unendo B con C, vengono individuati due nuovi triangoli, ABC e DBC che hanno in comune il lato CB e l'angolo di vertice B, ed hanno inoltre congruenti i lati AC e CD, ma evidentemente non sono congruenti. Quindi se due triangoli hanno due lati ed un angolo qualsiasi congruenti, non è detto che siano congruenti. Però nei due triangoli citati in figura, gli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{D}B$ sono supplementari.

Tale osservazione fa da premessa al quarto criterio di congruenza dei triangoli.

QUARTO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI. **Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due coppie di lati e l'angolo opposto ad uno di essi, a patto che l'angolo opposto all'altra coppia di lati congruenti sia della stessa specie (cioè sia, in entrambi i triangoli, acuto oppure retto oppure ottuso).**

Ipotesi: $AC \cong DF$, $CB \cong FE$, $C\widehat{A}B \cong F\widehat{D}E$, $C\widehat{B}A$ e $F\widehat{E}D$ della stessa specie .

Tesi: $ABC \cong DEF$

Dimostrazione:

Sulla semiretta AB prendiamo il punto G in maniera tale che AG sia congruente a DE. I triangoli AGC e DEF saranno congruenti per il primo criterio, poiché $AC \cong DF$ e $C\widehat{A}B \cong F\widehat{D}E$ per ipotesi, $AG \cong DE$ per costruzione. Di conseguenza anche i rimanenti elementi risulteranno congruenti, in particolare $CG \cong FE$ e $C\widehat{G}A \cong F\widehat{E}D$.

Se il punto G coincide con B, abbiamo dimostrato la congruenza dei triangoli ABC e DEF. Altrimenti, il segmento CG, dovendo essere congruente ad FE, risulta congruente a CB. Dunque il triangolo CGB è isoscele sulla base GB. Gli angoli alla base $C\widehat{G}B$ e $C\widehat{B}G$, congruenti, sono necessariamente acuti. Distinguiamo due casi:

- se G è interno al segmento AB, $C\widehat{G}B$ è esterno al triangolo AGC e $C\widehat{B}G$ è interno al triangolo ABC, quindi $D\widehat{E}F \cong A\widehat{G}C$ ottuso e $A\widehat{B}C$ acuto;
- se G esterno al segmento AB, $C\widehat{G}B$ è interno al triangolo AGC e $C\widehat{B}G$ è esterno al triangolo ABC, quindi $D\widehat{E}F \cong A\widehat{G}C$ acuto e $A\widehat{B}C$ ottuso.

Dunque, in nessuno dei due casi viene rispettata l'ipotesi: $C\widehat{B}A$ e $F\widehat{E}D$ sono della stessa specie■

Congruenze di triangoli rettangoli

Per quanto affermato nelle proposizioni precedenti, sappiamo che i triangoli rettangoli hanno una coppia di angoli congruenti (quelli retti, essendo tutti congruenti fra loro gli angoli retti, come affermato dal IV postulato di Euclide) e gli altri angoli necessariamente acuti, in quanto la somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto (come segue dal secondo teorema dell'angolo esterno e dai corollari).

Tenendo conto dunque dei criteri di congruenza dei triangoli, si possono riformulare dei criteri di congruenza specifici per i triangoli rettangoli.

CRITERI DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI RETTANGOLI. **Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti:**

(a) i due cateti (1° criterio);
(b) l'ipotenusa e un angolo acuto (2° criterio);
(c) un cateto e l'angolo acuto adiacente (2° criterio);
(d) un cateto e l'angolo acuto opposto (2° criterio);
(e) l'ipotenusa ed un cateto (4° criterio).

Il criterio (e) si chiama anche **criterio particolare di congruenza dei triangoli rettangoli** (ha naturalmente una formulazione più semplice del 4° criterio di congruenza dei triangoli perché si sa già che le coppie di angoli non citati nell'ipotesi sono "della stessa specie", perché certamente acuti). Due triangoli rettangoli che hanno congruenti l'ipotenusa ed un cateto hanno congruenti due coppie di lati e l'angolo opposto ad uno di essi (l'angolo retto, opposto all'ipotenusa), ed hanno gli angoli opposti all'altra coppia di lati congruenti della stessa specie (gli angoli opposti ai cateti congruenti sono acuti in entrambi i triangoli).

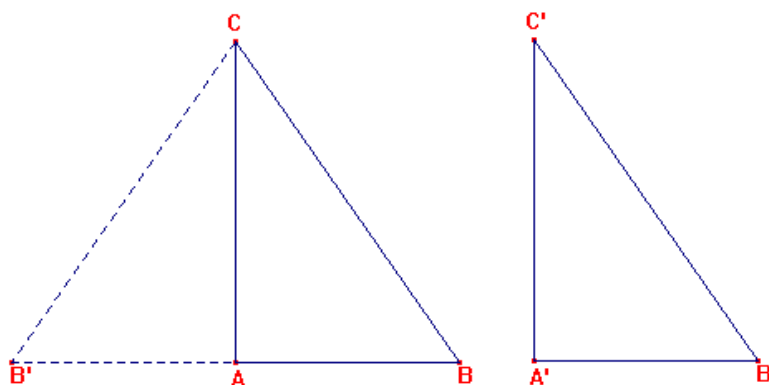
Data l'importanza di tale criterio, nonché la sua semplice dimostrazione indipendente dal quarto criterio di congruenza dei triangoli qualunque, lo riformuliamo a parte e ne proponiamo una dimostrazione:

CRITERIO PARTICOLARE DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI RETTANGOLI. **Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un cateto e l'ipotenusa.**

<u>Ipotesi:</u> $A \cong A' \cong$ angolo retto
$AC \cong A'C'$ $\quad BC \cong B'C'$

<u>Tesi :</u> $ABC \cong A'B'C'$

<u>Dimostrazione:</u>

Si prolunga il cateto AB di un segmento AB' congruente ad A'B', quindi si congiunge B' con C. Il triangolo AB'C è anch'esso rettangolo in A, in quanto l'angolo in A è adiacente ad un angolo retto (CÂB). I triangoli rettangoli AB'C e A'B'C' sono congruenti per il primo criterio in quanto hanno i due cateti ordinatamente congruenti: $AC \cong A'C'$ per ipotesi e $AB \cong A'B'$ per costruzione. Di conseguenza risulterà $CB \cong C'B'$ e dunque $CB' \cong CB$ (per la proprietà transitiva della congruenza, essendo $CB \cong C'B'$ per ipotesi). Quindi il triangolo CBB' è isoscele sulla base B'B, e di conseguenza, per il teorema (diretto) del triangolo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti: $A\widehat{B}C \cong A\widehat{B'}C$.

Allora i triangoli ABC e A'B'C' sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, avendo ordinatamente congruenti due coppie di angoli e il lato opposto ad uno di essi (l'ipotenusa)■

47 Vero o Falso?

a)	Un triangolo rettangolo ha due angolo complementari	V	F
b)	Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno almeno un lato congruente	V	F
c)	Due triangoli rettangoli che hanno un cateto in comune sono congruenti	V	F
d)	Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa in comune sono congruenti	V	F
e)	Due triangoli rettangoli isosceli sono sempre congruenti	V	F
f)	Due triangoli rettangoli isosceli che hanno un lato in comune sono congruenti	V	F
g)	Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari	V	F

Esercizi su tutto il capitolo

48 * Dimostrare che in triangolo rettangolo gli angoli diversi dall'angolo retto sono acuti. Dimostrare, inoltre, che non può esistere un triangolo rettangolo equilatero.

49 * Sia ABC un triangolo e sia CH la bisettrice dell'angolo in C. Da un punto D diverso da H del lato AB si conduca la retta r parallela alla bisettrice CH. Si dimostri che la retta r interseca le rette AC e BC in due punti che hanno la stessa distanza dal vertice C.

50 * Dato il triangolo ABC, sia P il punto d'intersezione delle bisettrici degli angoli in A e in B. Condurre per P la retta parallela al lato AB, che incontra i lati AC e BC nei punti E ed F rispettivamente. Dimostrare che $EF \cong AE+BF$.

51 * Due segmenti AB e CD hanno il punto medio M in comune. Dimostrare che le rette AC e BD sono parallele.

52 * Dagli estremi di un segmento AB, nello stesso semipiano rispetto alla retta AB, condurre due segmenti AC e BD paralleli. Dimostrare che, se CD//AB, allora AC è congruente a BD.

53 * Sia ABC un triangolo equilatero e sia r la retta bisettrice degli angoli esterni di vertice A. Dimostrare che r // BC.

54 * In un triangolo isoscele ABC di base AB, siano M e N rispettivamente i punti medi di AC e BC. Dimostrare che MN // AB.

55 * Dimostrare che, in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa lo divide in due triangoli che hanno tra loro e col triangolo di partenza gli angoli ordinatamente congruenti.

56 * Sulle rette parallele r e s scegliere rispettivamente due segmenti congruenti AB e CD, congiungere A con C e B con D. Provare che i segmenti AC e BD sono sia paralleli che congruenti.

57 * Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C è parallela alla base AB.

58 Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti la base e l’angolo al vertice.

59 In un triangolo isoscele, le altezze relative ai lati congruenti sono congruenti.

60 Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l’altezza relativa all’ipotenusa.

61 Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e la mediana relativa ad esso.

62 Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un angolo acuto e la sua bisettrice.

63 Se due triangoli hanno congruenti due coppie di lati e le mediane relative ai lati rimanenti, allora sono congruenti.

64 Dimostra che, se per i vertici di un triangolo si conducono le parallele ai lati opposti, queste parallele determinano, assieme al triangolo dato, quattro triangoli congruenti.

65 Dimostra che, in un triangolo isoscele, la bisettrice dell’angolo adiacente all’angolo al vertice è parallela alla base.

66 Dimostra che sono congruenti due triangoli isosceli che hanno gli angoli al vertice congruenti e congruenti le altezze relative a uno dei lati obliqui.

67 Dato un triangolo ABC, si prolunghi il lato CA dalla parte di A, si tracci la bisettrice dell’angolo interno di vertice A e si conduca da B la parallela a tale bisettrice, che incontri il prolungamento di CA nel punto D. Dimostrare che il triangolo ADB è isoscele.

68 Dato un angolo convesso aÔb traccia la sua bisettrice c. Per un punto P della bisettrice traccia la perpendicolare alla bisettrice stessa. Chiama A e B i punto di intersezione della perpendicolare con i lati a e b dell’angolo convesso. Dimostra che P è punto medio di AB.

69 Dato il triangolo isoscele ABC, di base AB, sul prolungamento dell’altezza relativa ad AB prendi un punto P. Traccia la retta per PA e per PB. Dimostra che l’angolo formato dalle rette PA e CA è congruente all’angolo formato dalle rette per PB e CB.

70 Nel triangolo isoscele ABC di vertice A e lati congruenti AB e AC, traccia le bisettrici degli angoli alla base. Sia D il loro punto di intersezione. Dimostra che anche il triangolo DBC è isoscele.

71 Dato un triangolo qualsiasi ABC dimostra che la bisettrice dell’angolo interno in A è perpendicolare alla bisettrice di uno degli angoli esterni in A.

72 Prolunga la mediana M del triangolo ABC di un segmento MD. Dimostra che se $AM \cong MD$ allora BD è parallela a CA..

73 Sia AN la mediana di un triangolo ABC. Dimostra che se ABM è isoscele il triangolo ABC è rettangolo e viceversa se il triangolo ABC è rettangolo in A allora ABM è isoscele.

74 Una retta t incontra due rette *a* e *b* rispettivamente in A e B. Dal punto medio M di AB traccia una retta che interseca a e b rispettivamente in C e D. Dimostra che se M è punto medio di CD allora *a* e *b* sono parallele.

75 Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB di un segmento BD congruente a BC. Dimostra che l’angolo in C esterno al triangolo ADC è il triplo dell’angolo ADC.

76 Dato il triangolo ABC traccia la retta *r* perpendicolare ad AB passante per B, la retta *s* perpendicolare ad AB passante per A, la retta *t* perpendicolare ad

AC passante per C. Detto D il punto di intersezione tra r e t, E il punto di intersezione tra s e t, dimostra che $D\widehat{A}C + C\widehat{B}E + B\widehat{C}E$ è un angolo retto.

77 Nel triangolo ABC traccia la media CM e il suo prolungamento MD a piacere. Da A conduci la perpendicolare alla mediana che la incontra in E, da B conduci un'altra perpendicolare alla mediana che la incontra in F. Dimostra che i triangoli AEM e BFM sono congruenti.

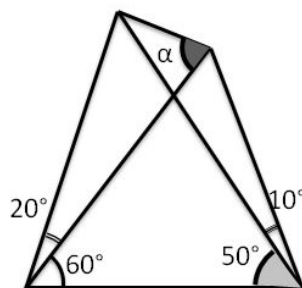
78 Sul prolungamento della base AB di un triangolo isoscele individua un punto D qualsiasi dalla parte di B. Traccia la perpendicolare per D a questo prolungamento, essa incontra i lati obliqui del triangolo AC e BC rispettivamente in E e in F. Dimostra che il triangolo CEF è isoscele.

79 Siano r e s due rette incidenti in un punto O. Su r prendi da parte opposta rispetto ad O i punti A e B tali che $AO \cong OB$. Su s prendi da parte opposta rispetto ad O i punti C e D tali che $CO \cong OD$. Quale delle seguenti coppie di rette sono parallele? Dimostralo. $CA // BD$; $CB // AD$

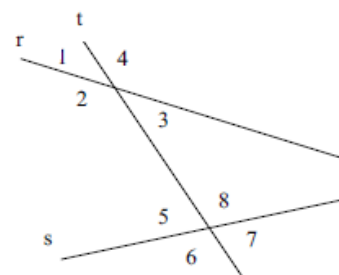
80 Sia ABC un triangolo acutangolo. Nel semipiano di origine AB che non contiene C individua un punto D in modo che $B\widehat{A}D \cong C\widehat{B}A$. Dimostra che $CA // AD$. Nell'ipotesi in cui $AD \cong CB$ dimostra che anche $AC // BD$.

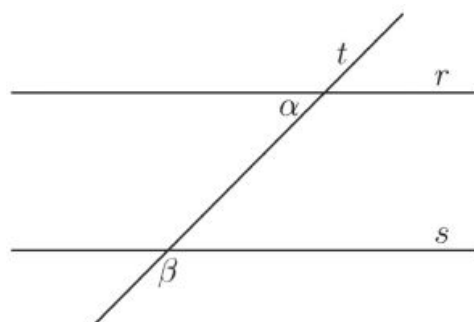
81 Calcola la misura degli angoli di un triangolo ABC sapendo che l'angolo A interno è 3/5 dell'angolo esterno A e che l'angolo B è la metà di A.

82 Sia data una stella a 5 punte inscritta in una circonferenza. Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella? (*I Giochi di Archimede 2003*)

83 Nella figura, quanto misura l'angolo α? (*I Giochi di Archimede 2003*)

Gli esercizi contrassegnati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 154-155; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

Quesiti dalle prove INVALSI

84 Le rette r ed s sono tagliate dalla trasversale t. Quale delle seguenti condizioni permette di stabilire, per qualunque posizione di t, che r ed s sono parallele?
Gli angoli…
A. 1 e 5 sono supplementari.
B. 2 e 8 sono uguali.
C. 3 e 7 sono supplementari.
D. 4 e 7 sono uguali.
(*Prove invalsi 2004*)

85 r e s sono due rette parallele tagliate da una trasversale t. Quale tra le seguenti proposizioni è vera qualunque sia la posizione di t?

Gli angoli α e β sono…
A. supplementari
B. uguali
C. complementari
D. corrispondenti.
(*Prove invalsi 2006*)

86 Per un triangolo ottusangolo qualsiasi, quale delle seguenti affermazioni è vera?

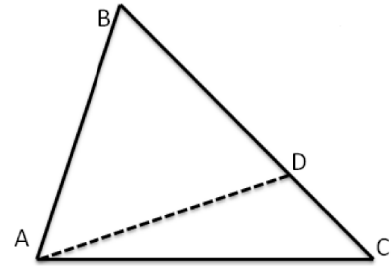
(a) La somma dei suoi due angoli più piccoli è minore dell'angolo più grande.
(b) Il punto di incontro degli assi dei lati è certamente interno al triangolo.
(c) Il triangolo è necessariamente isoscele.
(d) Il triangolo può essere rettangolo.
(*Prove invalsi 2006*)

►6. Disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo

TEOREMA. **In un triangolo, a lato maggiore si oppone angolo maggiore.**

Ipotesi: $BC > AB$

Tesi: $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$

Dimostrazione: Scegliamo opportunamente un punto D sul lato maggiore BC in modo che BD sia congruente ad AB. Se uniamo A con D, poiché il segmento AD è interno al triangolo ABC, il triangolo ABC viene diviso in due nuovi triangoli, ADB e ACD. Il triangolo ADB è isoscele sulla base AD pertanto ha gli angoli alla base congruenti, per cui risulta $B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B$. Ma $B\widehat{A}D$ è una parte propria di $B\widehat{A}C$, mentre $A\widehat{D}B$, come angolo esterno al triangolo ACD è maggiore dell'angolo $A\widehat{C}D = A\widehat{C}B$, interno non adiacente, per il primo teorema dell'angolo esterno. Si ha dunque: $B\widehat{A}C > B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B > A\widehat{C}B$ e quindi la tesi■

TEOREMA**. In un triangolo, ad angolo maggiore si oppone lato maggiore.**

Ipotesi: $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$. *Tesi*: $BC > AB$.

Dimostrazione: Dimostriamo la tesi in maniera indiretta facendo uso del teorema precedente e del teorema del triangolo isoscele. Supponiamo vera l'ipotesi: $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$. Facciamo un confronto tra i segmenti *BC* e *AB* considerando tutte le possibilità. È possibile che sia:

$BC \cong AB$; (ii) $BC < AB$; (iii) $BC > AB$

Se fosse vera (i), il triangolo ABC sarebbe isoscele sulla base AC e risulterebbe $B\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$, per il teorema del triangolo isoscele, contro l'ipotesi.

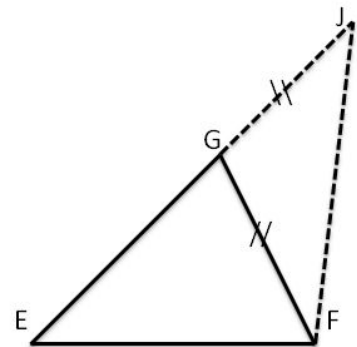
Se fosse vera (ii), per il teorema precedente risulterebbe $B\widehat{A}C < A\widehat{C}B$, contro l'ipotesi.

Rimane solo la possibilità che sia vera (iii), la quale infatti non contraddice il teorema precedente, anzi lo conferma. Quindi la tesi è dimostrata■

Da questo teorema discende la proprietà che in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è sempre maggiore di ciascuno dei due cateti, in quanto l'ipotenusa è il lato che si oppone all'angolo maggiore, l'angolo retto.

Ora dimostriamo una proprietà importante dei triangoli, nota come **disuguaglianza triangolare**.

TEOREMA**. In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.**

Dimostrazione: In riferimento alla figura a lato, dimostriamo che nel triangolo EFG, EF < EG + GF. Se EF fosse minore di un altro lato, sicuramente saremme minore della somma degli altri due e il teorema sarebbe dimsotrato. Esaminiamo il caso in cui EF è maggiore sia di FG che di EG. Prolunghiamo il lato EG dalla parte di G e prendiamo un punto J sul prolungamento in modo che il segmento GJ sia congruente a GF. Unendo J con F abbiamo il EFJ nel quale il lato EJ è congruente alla somma dei lati EG e GF. La tesi si riconduce dunque a dimostrare che il lato EF è minore di EJ. Osserviamo che il triangolo GFJ è isoscele sulla base FJ, per cui gli angoli alla base sono congruenti $G\widehat{F}J \cong G\widehat{J}F$. Ma l'angolo $G\widehat{F}J$ è una parte propria di $E\widehat{F}J$ che quindi risulta maggiore di $G\widehat{F}J \cong E\widehat{J}F$. Dunque, nel triangolo EFJ, il lato EJ, che si oppone ad angolo maggiore, è maggiore del lato EF, che si oppone ad angolo minore, per il teorema precedente.

Visto che la costruzione fatta si può ripetere tale quale rispetto a qualsiasi lato, si può concludere che EF<EG+GF, EG<EF+GF, GF<EF+EG e dunque, sottraendo ad ambo i mebri della prima disuguaglianza il lato GF si ha EF-EG<GF, analogamente sottranedo uno stesso segmento si hanno EF-GF<EG, EG-EF<GF, EG-EF<GF, EG-GF<EF, GF-EF<EG, GF-EG<EF. Leggendo le relazioni da destra verso sinistra, ogni lato è maggiore della differenza degli altri due. Abbiamo scritto tutte le disuguaglianze, anche se ovviamente ogni lato ha misura positiva mentre la differenza tra due lati può essere anche nulla o negativa■

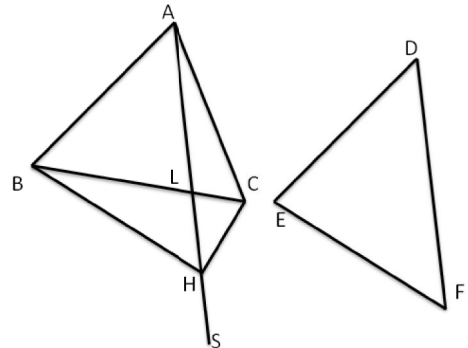
Proponiamo ora un teorema sulle diseguaglianze tra gli elementi di due triangoli.

Supponiamo di avere due triangoli aventi due coppie di lati rispettivamente congruenti. Allora, se anche gli angoli compresi sono congruenti, i due triangoli risultano congruenti per il primo criterio. Altrimenti, se i due angoli compresi tra i lati congruenti non sono congruenti, i due triangoli non sono congruenti, ed i terzi lati sono diseguali nello stesso verso degli angoli opposti ad essi (cioè compresi tra i lati congruenti).

TEOREMA**. Se due lati di un triangolo sono, rispettivamente, congruenti a due lati di un altro triangolo, e l'angolo compreso è nel primo triangolo maggiore che nel secondo, allora il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato del secondo.**

Ipotesi: $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$ con $AB \leq AC$.

Tesi: $BC > EF$.

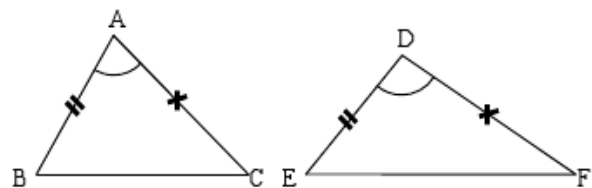
Dimostrazione: Tracciamo la semiretta AS di origine A, interna all'angolo $B\widehat{A}C$, in modo tale che $B\widehat{A}S \cong E\widehat{D}F$. Se prendiamo su AS il punto H tale che $AH \cong DF$ ed uniamo H con B, otteniamo un triangolo ABH congruente a DEF per il primo criterio.
È importante dimostrare che il punto H è esterno al triangolo ABC. Per dimostrare ciò, prendiamo il punto L, intersezione tra la semiretta AS ed il lato BC. Notiamo che abbiamo iniziato la costruzione a partire dal lato AB avendo supposto $AB \leq AC$, ma da questa diseguaglianza segue la corrispondente diseguaglianza tra gli angoli opposti: $A\widehat{B}C \geq A\widehat{C}B$. L'angolo $A\widehat{L}C$ è esterno al triangolo ABL, pertanto è maggiore dell'angolo $A\widehat{B}C$ per il primo teorema dell'angolo esterno. Mettendo insieme le due diseguaglianze si ha $A\widehat{L}C > A\widehat{B}C \geq A\widehat{C}B$, dunque nel triangolo ALC vale la seguente relazione tra due angoli: $A\widehat{L}C > A\widehat{C}B$. Vale quindi anche la corrispondente relazione tra i lati opposti, per cui $AC > AL$. Poiché $AH \cong DF \cong AC$, il punto L è interno al segmento AH, e dunque H è esterno al triangolo ABC.
Abbiamo già unito H con B, uniamo H anche con C, e ragioniamo sul triangolo BHC. Essendo BH congruente ad EF, la tesi è ricondotta a dimostrare che BC è maggiore di BH. Confrontiamo i rispettivi angoli opposti. Poiché il triangolo AHC è isoscele sulla base HC, gli angoli alla base risultano congruenti: $A\widehat{H}C \cong A\widehat{C}H$, dunque risulta $B\widehat{H}C > B\widehat{C}H$ perché:

$B\widehat{H}C = B\widehat{H}A + A\widehat{H}C > A\widehat{H}C \cong A\widehat{C}H = A\widehat{C}B + B\widehat{C}H > B\widehat{C}H$

Dalla precedente diseguaglianza tra gli angoli segue la corrispondente diseguaglianza tra i lati opposti: $BC > BH$ e dunque la tesi■

TEOREMA**. Se due lati di un triangolo sono, rispettivamente, congruenti a due lati di un altro triangolo, e il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato del secondo, allora l'angolo opposto al lato diseguale (compreso tra i lati congruenti) è nel primo triangolo maggiore che nel secondo.**

Ipotesi: $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $BC > EF$.

Tesi: $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$.

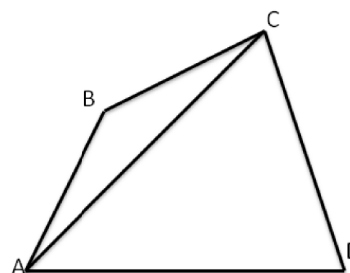
Dimostrazione: Procediamo per esclusione, in maniera analoga a come abbiamo fatto nel teorema inverso sulle diseguaglianze tra gli elementi di un triangolo.
Supponiamo vera l'ipotesi e studiamo i vari casi delle possibili relazioni tra gli angoli citati nella tesi. Sono possibili tre casi:

(i) $B\widehat{A}C \cong E\widehat{D}F$; (ii) $B\widehat{A}C < E\widehat{D}F$; (iii) $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$.

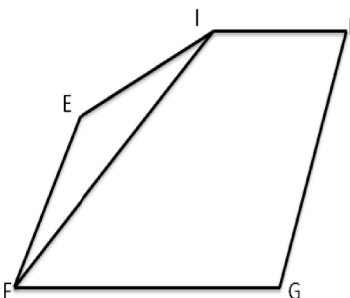
Se valesse l'ipotesi (i), essendo anche $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, i triangoli risulterebbero congruenti per il primo criterio, contrariamente all'ipotesi $BC > EF$.
Se valesse l'ipotesi (ii), essendo anche $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, per il teorema precedente risulterebbe $BC < EF$, contrariamente all'ipotesi $BC > EF$.
Rimane l'ipotesi (iii), che non contraddice il teorema precedente e che anzi lo conferma.

Dunque la tesi è dimostrata■

Dalla diseguaglianza triangolare seguono alcune proprietà riguardanti i lati di poligoni.

TEOREMA. **In un qualsiasi poligono ciascun lato è minore della somma dei rimanenti.**

Nel quadrilatero ABCD, se vogliamo dimostrare ad esempio che il lato AD è minore della somma degli altri tre, tracciamo la diagonale AC che divide il quadrilatero in due triangoli. Risulta $AD < AC+CD$, ed anche $AC < AB+BC$, per la diseguaglianza triangolare, per cui $AD < AB+BC+CD$.

Ma la proprietà non è limitata ai quadrilateri. Nel pentagono EFGHI, se vogliamo dimostrare ad esempio che il lato EI è minore della somma degli altri quattro, possiamo tracciare la diagonale EG che divide il pentagono in un quadrilatero ed un triangolo. Se suppo-

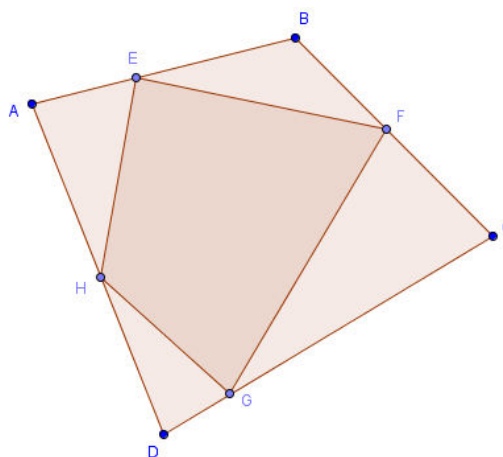
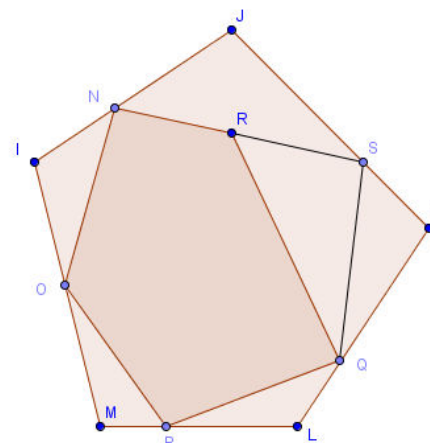
niamo che la tesi sia vera per i quadrilateri, verifichiamo che la tesi vale anche per i pentagoni. Infatti risulta $EI < EG+GH+HI$, in quanto la tesi è vera per i quadrilateri, e $EG < EF+FG$, per la diseguaglianza triangolare. Dunque $EI < EF+FG+GH+HI$, come volevasi dimostrare.

Ma in realtà questo passaggio che abbiamo fatto dai quadrilateri ai pentagoni vale anche per passare dai pentagoni agli esagoni ecc. seguendo il procedimento per induzione.

Più precisamente, poiché vale la diseguaglianza triangolare, la tesi è vera per i triangoli. Supponendo la tesi vera per tutti i poligoni di n lati ($n \geq 3$) si dimostra che la tesi vale anche per i poligoni di $n+1$ lati. Allora, la tesi è vera per tutti i poligoni (di un numero qualsiasi di lati).

DEFINIZIONE. Un poligono convesso si dice inscritto in un altro se ogni vertice del primo giace sul contorno del secondo. Questo poligono si dice circoscritto al primo.

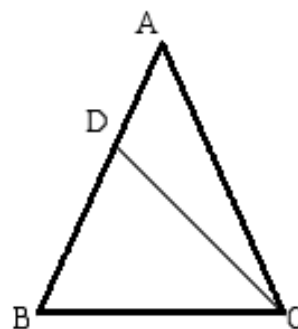
TEOREMA. **Se un poligono convesso è inscritto in un altro, il perimetro del primo è minore del perimetro del secondo.**

Illustriamo con un semplice esempio il contenuto del teorema. Non è da escludere il caso che un lato del primo poligono giaccia interamente su un lato del secondo (e nemmeno che la stessa situazione valga per più lati), però è semplice dimostrare la diseguaglianza anche senza considerare le parti del contorno perfettamente sovrapposte.

Osserviamo i quadrilateri EFGH e ABCD (il primo inscritto nel secondo) in figura; per la diseguaglianza triangolare $EF < EB + BF$, $FG < FC + CG$, $GH < GD + DH$, $HE < HA + AE$. La somma dei primi membri delle quattro disuguaglianze rappresenta il perimetro di EFGH, la somma dei secondi membri rappresenta il perimetro di ABCD.

La tesi del teorema precedente vale anche se il poligono, anziché essere inscritto, è semplicemente contenuto nell'altro. Illustriamo questa proprietà con un semplice esempio: il poligono NOPQR è contenuto in IJKLM. Il lato RQ è minore di RS+SQ per la diseguaglianza triangolare. Dunque il perimetro del poligono NOPQR è minore del perimetro di NOPQS, e quest'ultimo poligono è inscritto in IJKLM, per cui il perimetro di NOPQS è minore del perimetro di IJKLM. Dalle due disuguaglianze segue la tesi.

Esempio

- Nel triangolo isoscele ABC, isoscele sulla base BC, si prende sul lato AB un punto D. Dimostra che DC>DB.

Individuiamo ipotesi, tesi e costruiamo il disegno.

Ipotesi: $AB\cong AC$; $D\in AC$
Tesi: $CD>BD$
Dimostrazione
Consideriamo il triangolo DBC
Poiché $B\widehat{C}D<B\widehat{C}A$ e $B\widehat{C}A\cong A\widehat{B}C$ si ha che $B\widehat{C}D<D\widehat{B}C$
Nel triangolo DBC ad angolo maggiore si oppone lato maggiore: $CD>BD$.

87 Vero Falso?

a. Esiste un triangolo i cui lati misurano 10cm, 3cm, 15cm V F
b. Un triangolo isoscele può essere ottusangolo V F
c. Dati tre segmenti di cui almeno uno maggiore degli altri è sempre possibile costruire un triangolo che ha lati congruenti ai tre segmenti dati V F
d. Dai tre segmenti di cui due uguali e uno maggiore degli altri due è sempre possibile costruire un triangolo isoscele che ha lati congruenti ai tre segmenti dati V F
e. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è minore della somma dei due cateti V F
f. Un triangolo di perimetro 100cm non può avere un lato di 60cm V F
g. Un triangolo isoscele può essere ottusangolo V F
h. In un triangolo l'angolo che si oppone al lato maggiore è acuto V F
i. In un triangolo rettangolo i cateti sono sempre congruenti V F
j. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa può essere congruente ad un cateto V F
k. Un triangolo può avere due lati disuguali e due angoli uguali V F
l. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa può essere congruente a un cateto V F
m. Un triangolo può avere due angoli uguali e due lati disuguali V F

Quesiti dalle prove INVALSI

88 In un triangolo, le misure dei lati sono a, b, c, con $a=b<c$. Detti α, β, γ gli angoli interni del triangolo, rispettivamente opposti ai lati a, b, c, quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. $\alpha=\gamma$ B. $\beta=\gamma$ C. $\gamma>\alpha$ D. $\alpha>\beta$

(*Prove invalsi 2004*)

89 Un triangolo ha un lato di 6cm e uno di 10cm. Quale tra le seguenti non può essere la misura della lunghezza del terzo lato?

A. 6,5cm B. 10cm C. 15,5cm D. 17cm

(*Prove invalsi 20010*)

90 Sono dati due triangoli ABC e DEF di cui si sa che $\widehat{B}>\widehat{A}$, $\widehat{F}>\widehat{D}$, $BC\cong ED$. Dimostra che $AC>EF$.

91 Dimostra che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

92 Dimostra che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore della semisomma dei cateti.

93 In un triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è maggiore di ciascuno degli altri due lati.

94 Dimostra che in un triangolo il doppio di un lato è minore del perimetro del triangolo.

95 Dimostra che in un triangolo il doppio di una qualsiasi altezza è minore del perimetro del triangolo.

96 Dimostra che in un poligono convesso una qualunque diagonale è minore del semiperimetro

97 Se in un triangolo due mediane sono congruenti, il triangolo è isoscele.

98 Se due lati di un triangolo sono diseguali, la mediana uscente dal loro vertice comune forma con il lato opposto angoli diseguali ed è maggiore quello dalla parte del lato maggiore.

99 In un triangolo ogni lato è minore del semiperimetro.

100 In un triangolo l'altezza è minore della semisomma dei due lati che hanno un vertice in comune con essa.

101 In un triangolo la mediana è minore della semisomma dei due lati che hanno un vertice in comune con essa.

102 In un triangolo ABC traccia la bisettrice BE dell'angolo in B. Dimostra che AB>AE. (Per la dimostrazione utilizza il teorema dell'angolo esterno).

103 Nel triangolo ABC traccia la mediana AM. Dimostra che se AC è maggiore di AB allora l'angolo AMC è maggiore dell'angolo AMB.

104 Nel triangolo ABC prendi un punto D interno al triangolo. Dimostra che il perimetro del triangolo ADB è minore del perimetro del triangolo ABC. (Prolunga il lato AD fino a incontrare il lato BC in E. Ragionando opportunamente sui triangolo che si vengono a formare dimostra che AD+DB<AC+CB).

105 Esternamente al triangolo ABC prendi un punto D. Congiungi D con A, con B e con C. Dimostra che il perimetro di ABC è minore del doppio della somma delle distanze di D dai tre vertici del triangolo.

106 Nel triangolo ABC traccia la mediana AM relativa al lato BC, dimostra che AM è minore della semisomma degli altri due lati AB e BC. (Prolunga la mediana di segmento congruente alla mediana stessa.)

107 In ogni triangolo la somma delle mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

108 Dimostra che in un triangolo acutangolo la somma delle altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

109 Dato un triangolo ABC in cui AB<AC traccia l'altezza AH relativa alla base BC. Dimostra che l'angolo HAC è maggiore dell'angolo HAB.

110 Dato il triangolo isoscele ABC unisci il vertice A con un punto D della base BC, dimostra che AD è minore di ciascuno dei due lati congruenti AB e AC.

111 Dimostra in un poligono convesso una qualunque diagonale è minore del semiperimetro.

112 In un triangolo ABC si ha che AB>AC. Si tracci la bisettrice AD dell'angolo in A, si dimostri che $A\widehat{D}B>A\widehat{D}C$.

113 Due triangoli rettangoli hanno un cateto in comune, l'angolo opposto al cateto in comune è maggiore nel primo triangolo, dimostra che l'ipotenusa del primo triangolo è minore dell'ipotenusa del secondo triangolo.

114 * Dimostra che in ogni triangolo la somma dei tre lati è sempre maggiore del doppio di un lato.

115 * Disegnare un triangolo ABC tale che AB>AC e la mediana AM di BC. Dimostrare che $A\hat{M}C<A\hat{M}B$.

116 * Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Fissare sul lato AC un punto E. Dimostrare che AE<BE.

117 * Consideriamo il triangolo ABC isoscele sulla base AB e un punto D sul prolungamento di BC dalla parte di B. Dimostra che $C\hat{A}B>B\hat{D}A$.

118 * Disegnare un triangolo ABC e un punto E interno al triangolo. Si ongiunga E con i vertici B e C. Dimostrare che $B\hat{E}C>B\hat{A}C$.

119 * Dati i triangoli ABC e DEF con AC > DE, $\hat{A}>\hat{B}$ e $\hat{F}>\hat{D}$, dimostrare che BC > FE.

120 * Nel triangolo ABC scegliere a caso tre punti, D su AB, E su BC e F su AC. Dimostrare che la somma dei lati del triangolo DEF è minore della somma dei lati del triangolo ABC.

121 * Il triangolo ABC, isoscele e acutangolo, ha il lato obliquo congruente a quello di un triangolo rettangolo isoscele A'B'C'. Dimostrare che le basi di detti triangoli sono diverse. Si puo eseguire la dimostrazione anche nel caso in cui il primo triangolo sia ottusangolo?

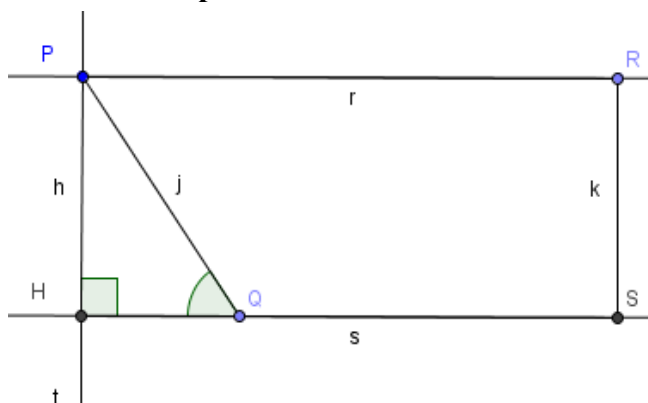
MATEMATICA C3 - GEOMETRIA
4. QUADRILATERI

In geometry, a rhombus or rhomb is a quadrilateral whose four sides all have the same length.
Phot by: pursanovd
Taken from: http://www.flickr.com/photos/pursanovd/3669422214/

Indice

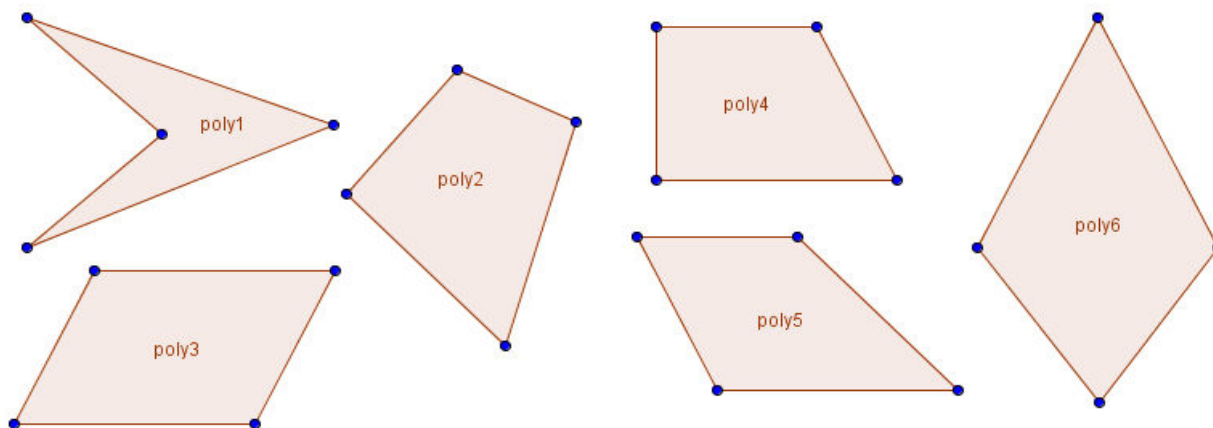
►1. Generalità sui quadrilateri

Distanza di un punto da una retta e altezza di una striscia di piano

Ricordiamo che come definizione di (***misura*** della) **distanza di un punto da una retta** è stata presa la lunghezza del segmento congiungente il punto con il piede della perpendicolare mandata dal punto alla retta (vedi figura seguente). Analogamente, per **distanza tra due rette parallele**, detta anche altezza della striscia di piano individuata dalle due rette parallele, si intende la distanza di un punto qualsiasi di una retta dall'altra retta. Vogliamo far vedere ora che queste definizioni sono coerenti con il concetto di distanza tra due insiemi di punti come percorso più breve che congiunge un qualsiasi punto del primo insieme con un generico punto appartenente al secondo insieme.

Infatti, se congiungiamo un generico punto P di una retta r con H, piede della perpendicolare t mandata sulla retta s//r, e con un altro punto $Q \in s$, viene individuato un triangolo rettangolo PHQ, di cui PH è un cateto e PQ è l'ipotenusa. Dal teorema sulle diseguaglianze degli elementi di un triangolo, l'ipotenusa è certamente maggiore di un cateto in quanto lato che si oppone ad angolo maggiore. Dunque PH è il segmento di lunghezza minore tra tutti quelli che congiungono P con un punto della retta s.

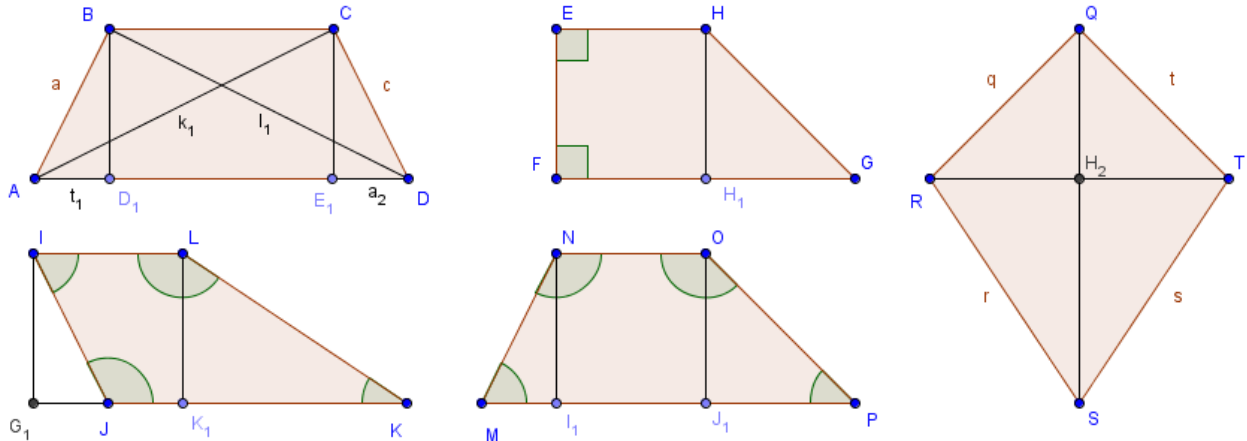
Generalità sui poligoni

Se un poligono ha più di tre lati, allora può anche essere concavo. Ricordiamo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360°. Due lati non consecutivi di un quadrilatero si dicono lati opposti; due angoli che non siano adiacenti allo stesso lato analogamente si dicono angoli opposti.

In figura sono rappresentati un quadrilatero concavo (poly1), un generico quadrilatero convesso (poly2), un quadrilatero particolare a forma di "aquilone" (poly6) e tre quadrilateri "notevoli": poly3 ha i lati opposti paralleli (a due a due), poly4 e poly5 hanno una coppia di lati opposti paralleli.

I quadrilateri che, come poly6, hanno due lati consecutivi congruenti ed altri due lati consecutivi anch'essi congruenti, si dicono **deltoidi**; i quadrilateri che, come poly 3, hanno i lati opposti paralleli si dicono **parallelogrammi**; i quadrilateri che, come poly 4 e poly 5, hanno una coppia di lati opposti paralleli si dicono **trapezi**. In analogia alla definizione di triangolo isoscele (come triangolo avente "almeno" due lati congruenti), alcuni autori definiscono **trapezio** un quadrilatero avente "almeno" una coppia di lati opposti paralleli: in questo modo un **parallelogramma** è un particolare tipo di trapezio. Ricordiamo anche che Euclide, al contrario, classificava come trapezi tutti i quadrilateri che non fossero parallelogrammi.

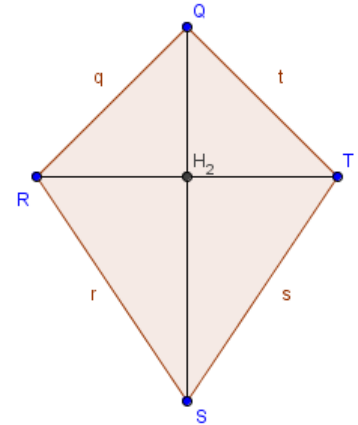
Noi useremo come **definizione di trapezio quella di un quadrilatero avente "solo" una coppia di lati opposti paralleli.** Ci riferiremo al parallelogramma come ad una figura piana costituita dall'intersezione di due strisce di piano non parallele fra loro; al trapezio come intersezione tra una striscia di piano ed un angolo convesso con vertice esterno alla striscia e lati che intersecano la striscia stessa. Poiché le strisce di piano sono convesse, sia i parallelogrammi sia i trapezi, come intersezioni di figure convesse, sono convessi.

►2. Trapezio e deltoide

Osserviamo le figure seguenti. I quadrilateri ABCD, EFGH, IJKL, MNOP sono trapezi perché hanno una coppia di lati opposti paralleli. Tali lati paralleli si dicono **basi** e si distinguono in **base maggiore** e **base minore**. Gli altri lati si dicono **lati obliqui**. La distanza tra le rette parallele si dice **altezza** del trapezio.
Un trapezio avente i lati obliqui congruenti si dice **isoscele**. Un trapezio avente un lato perpendicolare alle basi si dice **rettangolo**. Un trapezio che non è né isoscele né rettangolo si dice **scaleno**.

Proprietà del trapezio

In ogni trapezio, gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono supplementari. Infatti, essi sono coniugati interni rispetto alle rette delle basi tagliate dalla trasversale individuata dal lato obliquo.

Gli angoli adiacenti alla base maggiore di un trapezio rettangolo sono uno retto ed uno acuto; gli angoli adiacenti alla base minore sono uno retto ed uno ottuso. Se un trapezio avesse quattro angoli retti, i lati obliqui sarebbero entrambi perpendicolari alle basi, e di conseguenza paralleli tra loro. Dunque in questo caso il trapezio risulterebbe essere un parallelogramma.
Un trapezio scaleno può avere gli angoli adiacenti alla base maggiore entrambi acuti (e quindi gli angoli adiacenti alla base minore entrambi ottusi) oppure due angoli opposti acuti e due angoli opposti ottusi (i due tipi di trapezio scaleno sono rappresentati in figura come MNOP e IJKL rispettivamente). I quattro angoli sono comunque non congruenti, altrimenti il "trapezio" risulterebbe un trapezio isoscele nel primo caso ed un parallelogramma nel secondo caso.
In un trapezio isoscele, gli angoli adiacenti alla base maggiore sono acuti, gli angoli adiacenti alla base minore sono ottusi.
A tal proposito, facciamo riferimento al trapezio IJKL per dire che non può esistere un trapezio isoscele con due angoli acuti opposti e due angoli ottusi opposti. Infatti, se fosse $IJ \cong LK$, i triangoli IG_1J e LK_1K risulterebbero congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, avendo congruenti le ipotenuse (i lati obliqui del trapezio) ed una coppia di cateti (le altezze del trapezio), da cui seguirebbe in particolare che $I\widehat{J}G_1 \cong L\widehat{K}K_1$, e pertanto l'angolo in K sarebbe supplementare dell'angolo in J, cosa che garantirebbe il parallelismo dei lati obliqui. Dunque, un ipotetico trapezio isoscele con due angoli acuti opposti sarebbe un parallelogramma.
Inoltre, se il trapezio è isoscele, gli angoli adiacenti a ciascuna delle basi sono congruenti.
Infatti, in riferimento al trapezio ABCD, tracciate le altezze BD_1 e CE_1 (tra loro congruenti perché entrambe rappresentano la distanza tra due rette parallele), i triangoli AD_1B e E_1DC risultano congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, avendo congruenti le ipotenuse (i lati obliqui del trapezio) ed una coppia

di cateti (le altezze del trapezio). Pertanto i rimanenti elementi risultano ordinatamente congruenti: $B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}C$, $A\widehat{B}D_1 \cong D\widehat{C}E_1$, $AD_1 \cong E_1D$.
Dunque sono congruenti anche le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore.
Quindi anche $A\widehat{B}C \cong B\widehat{C}D$ in quanto somme di angoli congruenti $\left(A\widehat{B}D_1 + 1\widehat{R} \cong D\widehat{C}E_1 + 1\widehat{R}\right)$.
In un trapezio isoscele, inoltre, anche le due diagonali sono congruenti. Infatti, in riferimento sempre al trapezio ABCD in figura, i triangoli ABC e DCB risultano congruenti per il primo criterio, avendo BC in comune, AB e CD congruenti per ipotesi, e gli angoli compresi (adiacenti alla base minore) congruenti per quanto appena dimostrato. Di conseguenza i rimanenti elementi sono ordinatamente congruenti, in particolare i terzi lati (che sono, appunto, le diagonali AC e BD del trapezio).
Proprietà del deltoide
Sia QRST un deltoide, con $QR \cong QT$ e $RS \cong TS$. Allora, se tracciamo le diagonali QS ed RT (e chiamiamo H_1 il loro punto d'intersezione), i triangoli QRT e STR sono isosceli sulla base comune RT. Dunque, se chiamiamo H_1 il punto medio di RT, QH_1 ed SH_1 sono mediane, bisettrici e altezze (relative alla base ed agli angoli al vertice dei due triangoli isosceli), per cui QS è perpendicolare ad RT e passa per il punto H_1. Dunque le due diagonali sono perpendicolari e si incontrano nel punto medio di RT. Inoltre i triangoli SQR ed STQ sono congruenti per il terzo criterio (e dunque risulta $Q\widehat{R}S \cong Q\widehat{T}S$).

I quattro lati di un deltoide non potrebbero essere tutti congruenti, in quanto, dalla congruenza degli angoli opposti banalmente deducibile, risulterebbero i lati opposti paralleli, e quindi il "deltoide" sarebbe un parallelogramma. Non è al contrario escluso che un angolo possa essere retto (ma non più di uno, altrimenti il "deltoide" sarebbe un parallelogramma), mentre gli angoli ottusi possono essere uno, due o tre (come pure gli angoli acuti). Lasciamo al lettore il compito di provare queste semplici proprietà, costruendo vari tipi di deltoidi.

►3. Proprietà dei parallelogrammi

Passiamo ora ad esaminare le principali proprietà di un parallelogramma.

TEOREMA
In ogni parallelogramma:
(a) gli angoli adiacenti allo stesso lato (a ciascun lato) sono supplementari;
(b) gli angoli opposti sono congruenti;
(c) ciascuna diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti;
(d) i lati opposti sono congruenti;
(e) le diagonali si dividono scambievolmente per metà.

Ipotesi: $AB // CD$, $AD // BC$

Tesi (1): $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$, $A\widehat{B}C + B\widehat{C}D \cong \pi$, $B\widehat{C}D + C\widehat{D}A \cong \pi$, π è l'angolo piatto.

Tesi (2): $A\widehat{B}C \cong C\widehat{D}A$, $D\widehat{A}B \cong B\widehat{C}D$

Tesi (3): $ABC \cong CDA$, $DAB \cong BCD$

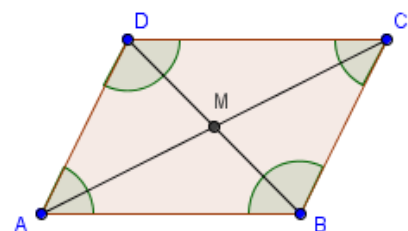
Tesi (4): $AB \cong CD$, $AD \cong BC$

Tesi (5): $AM \cong MC$, $DM \cong MB$

Dimostrazione

(1) Se $AB // CD$, gli angoli in A e D sono supplementari, e così pure gli angoli in B e C, in quanto coniugati interni rispetto alle due rette parallele tagliate rispettivamente dalle trasversali AD e BC. Analogamente, se $AD // BC$, gli angoli in A e B sono supplementari, ed anche gli angoli in C e D. La tesi (a) è pertanto dimostrata.

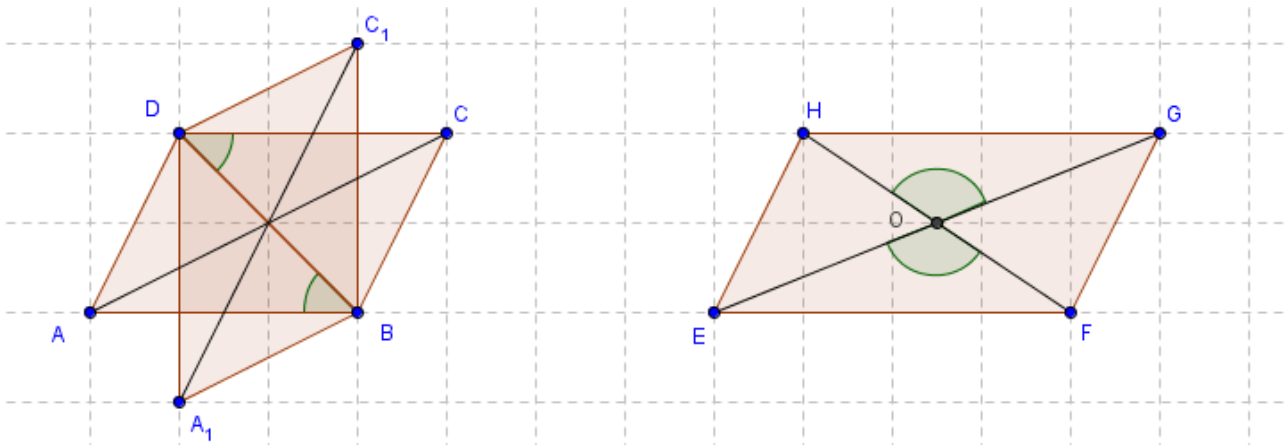
(2) Dunque, se è vera l'ipotesi, possiamo considerare verificate le congruenze della tesi (a). Da queste segue che gli angoli opposti sono congruenti in quanto supplementari dello stesso angolo: gli angoli in A e C sono supplementari entrambi dell'angolo in B, gli angoli in B e in D sono entrambi supplementari dell'angolo in A. La tesi (b) è pertanto dimostrata.

(3) Tracciamo ora una diagonale, ad esempio AC, e consideriamo i due triangoli che si vengono a formare, ABC e ACD. Essendo $AB // CD$, risulta $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ ed essendo $AD // BC$, risulta

$D\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$, in quanto sono coppie di angoli alterni interni, i primi rispetto alle rette AB e CD tagliate dalla trasversale AC, gli altri rispetto alle rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale AC. I due triangoli dunque, avendo in comune il lato AC, risultano congruenti per il secondo criterio. Analogamente, applicando il ragionamento precedente ai triangoli ABD e DBC dopo aver tracciato la diagonale DB, concludiamo che anche i due triangoli ADB e DBC risultano congruenti per il secondo criterio. Pertanto la tesi (c) è dimostrata.

(4) Dunque, se è vera l'ipotesi, possiamo considerare verificate le congruenze della tesi (c). Dalla congruenza dei triangoli ABC e CDA segue la congruenza dei lati AB e CD, dalla congruenza dei triangoli DAB e BCD segue la congruenza dei lati AD e BC. Pertanto la tesi (d) è dimostrata.

(5) Dopo aver tracciato entrambe le diagonali, chiamiamo M il loro punto d'intersezione. Confrontiamo i triangoli ABM e CDM: essi risultano congruenti per il secondo criterio, in quanto $AB \cong CD$ (tesi (d)), $D\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$ e $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ (come visto nel punto (c) della dimostrazione). Quindi anche i rimanenti elementi risultano ordinatamente congruenti, in particolare $AM \cong MC$, $DM \cong MB$. Pertanto anche la tesi (e) è dimostrata.

Il teorema precedente è invertibile. Precisamente vale il teorema seguente:

TEOREMA
Se in un quadrilatero è verificata una delle seguenti ipotesi:
(1) gli angoli adiacenti allo stesso lato (a ciascun lato) sono supplementari;
(2) gli angoli opposti sono congruenti;
(3) ciascuna diagonale divide il quadrilatero in due triangoli congruenti;
(4) i lati opposti sono congruenti;
(5) le diagonali si dividono scambievolmente per metà;
(6) due lati opposti sono paralleli e congruenti,
allora il quadrilatero è un parallelogramma.

Dimostrazione

Facciamo riferimento al quadrilatero ABCD in figura per il punto (c) della dimostrazione; per gli altri punti ci riferiamo invece al quadrilatero EFGH.

(1) Sia ad esempio, in riferimento alla figura precedente, $H\widehat{E}F + E\widehat{F}G \cong \pi$, dove π è l'angolo piatto. Tali angoli, rispetto alle rette EH ed FG tagliate dalla trasversale EF sono coniugati interni. Per il V postulato di Euclide le rette EH ed FG sono parallele. Analogamente si può ripetere il ragionamento per gli angoli in F e G: se $E\widehat{F}G + F\widehat{G}H \cong \pi$, le rette EF ed HG sono parallele. Dunque EFGH è un parallelogramma, avendo i lati opposti paralleli.

(2) Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero misura 360° (cioè è congruente al quadruplo di un angolo retto), se gli angoli opposti sono congruenti, vuol dire che $H\widehat{E}F + E\widehat{F}G + F\widehat{G}H + G\widehat{H}E \cong 2H\widehat{E}F + 2E\widehat{F}G \cong 2\pi$, per cui $H\widehat{E}F + E\widehat{F}G \cong \pi$, cioè gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari (ci siamo ricondotti al caso precedente). Pertanto EFGH è un parallelogramma.

(3) Sia BD una diagonale del quadrilatero ABCD. Allora i vertici A e C cadranno su semipiani opposti rispetto alla retta BD. Nel caso in cui i due triangoli BDA e BDC, oltre che congruenti, sono isosceli sulla base BD, il quadrilatero ABCD ha gli angoli opposti congruenti, per cui è un parallelogramma per (b). Se al contrario BDA e BDC non sono isosceli sulla base BD, allora dobbiamo considerare due sottocasi distinti, evidenziati in figura con quattro diversi quadrilateri. Se fosse $AD \cong DC$ e $AB \cong BC$, la figura risulterebbe un deltoide e l'altra diagonale AC non dividerebbe il quadrilatero in due triangoli congruenti. Rimane l'altro sottocaso possibile, che sia cioè $AB \cong DC$ e $AD \cong BC$, ed inoltre $A\widehat{D}B \cong D\widehat{B}C$, $A\widehat{B}D \cong B\widehat{D}C$ e $D\widehat{A}B \cong B\widehat{C}D$, pertanto il quadrilatero risulta essere un parallelogramma per (b). Dunque in ogni caso possibile la tesi è dimostrata.

(4) Se tracciamo la diagonale EG, il quadrilatero EFGH viene diviso in due triangoli EFG e EGH, congruenti per il terzo criterio. Di conseguenza risulta $E\widehat{G}H \cong G\widehat{E}F$ e $E\widehat{G}F \cong G\widehat{E}H$, coppie di angoli alterni interni, nell'ordine rispetto alle rette EF e GH e rispetto alle rette EH ed FG, tagliate dalla trasversale EG. Dunque i lati opposti del quadrilatero EFGH risultano paralleli, per cui si tratta di un parallelogramma.

(5) Detto O il punto d'incontro delle diagonali, i triangoli OEF ed OGH risultano congruenti per il primo criterio, in quanto $OE \cong OG$, $OH \cong OF$ e gli angoli compresi sono congruenti perché opposti al vertice. Di conseguenza risulta anche $H\widehat{G}E \cong G\widehat{E}F$, angoli alterni interni rispetto alle rette HG ed EF tagliate dalla trasversale EG. HG ed EF risultano pertanto parallele. Analogo discorso vale se consideriamo i triangoli congruenti OFG ed OHE, per cui anche le rette FG ed HE risultano parallele. Dunque il quadrilatero EFGH è un parallelogramma.

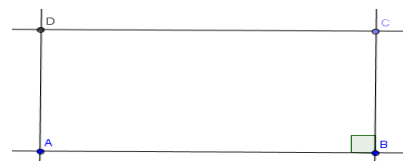
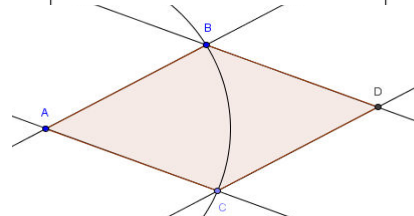
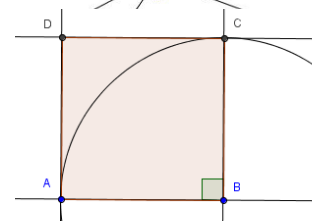
(6) Supponiamo EF e GH paralleli e congruenti. Tracciata la diagonale EG, risulta $H\widehat{G}E \cong G\widehat{E}F$, e dunque i triangoli EGH e GEF risultano congruenti per il primo criterio. Di conseguenza risulta $HE \cong GF$, per cui il quadrilatero ha anche l'altra coppia di lati opposti congruenti. EFGH è dunque un parallelogramma per (d).

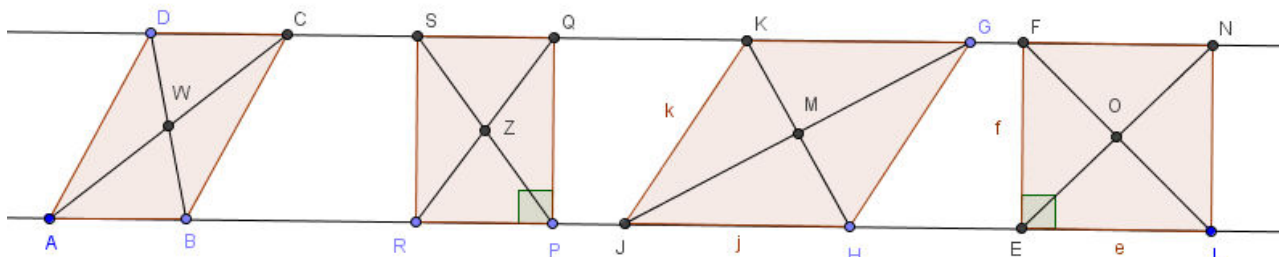
1 Quali tra queste sono proprietà del parallelogrammo? Attenzione: c'è più di una risposta corretta.

[A] ciascuna diagonale lo divide in due triangoli uguali
[B] gli angoli opposti sono uguali
[C] tutti i lati sono uguali
[D] gli angoli sulla base sono uguali
[E] le diagonali sono perpendicolari
[F] gli angoli sono tutti congruenti
[G] le diagonali sono anche bisettrici

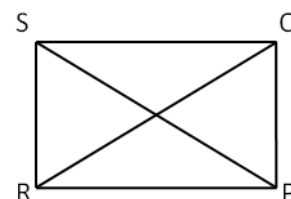
►4. Parallelogrammi particolari

I parallelogrammi possono essere sia equiangoli sia equilateri.

Se un parallelogramma è equiangolo, dato che la somma degli angoli interni è 360°, deve avere quattro angoli retti: questo succede quando due lati opposti, paralleli tra loro, sono perpendicolari all'altra coppia di lati opposti. Un tale parallelogramma si chiama **rettangolo**.

Se un parallelogramma è equilatero, vuol dire che ciascuna diagonale lo divide in due triangoli isosceli. Un tale parallelogramma si chiama **rombo**.

Un parallelogramma sia equiangolo sia equilatero deve essere contemporaneamente un rettangolo ed un rombo: l'unico tipo di quadrilatero regolare, il **quadrato**. Infatti un quadrilatero, per essere regolare, deve necessariamente avere quattro angoli retti; è quindi un parallelogramma, prima ancora che un rettangolo, perché due angoli retti, oltre ad essere congruenti, sono anche supplementari; inoltre è un rombo in quanto è un parallelogramma con quattro lati congruenti.

A parte le proprietà particolari insite nelle stesse definizioni, il rettangolo e il rombo si distinguono tra loro e dagli altri parallelogrammi per alcune proprietà riguardanti le diagonali. Naturalmente il quadrato gode delle proprietà sia del rettangolo sia del rombo.

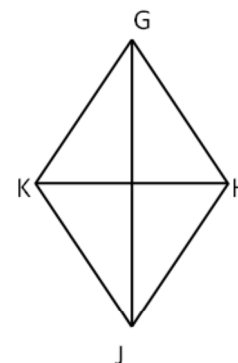
Ricordiamo che in un parallelogramma le diagonali si dividono scambievolmente per metà. Ora mostreremo che in un rettangolo le diagonali sono congruenti, in un rombo sono perpendicolari.

TEOREMA. In ogni rettangolo le diagonali sono congruenti. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali congruenti, allora è un rettangolo.

Dimostrazione

Sia RPQS un rettangolo; tracciate le diagonali RQ e PS, confrontiamo i triangoli SRP e RPQ. Tali triangoli rettangoli hanno il cateto RP in comune ed hanno gli altri cateti, SR e PQ rispettivamente, congruenti in quanto lati opposti di un rettangolo. Dunque SRP e RPQ sono congruenti per il primo criterio, e di conseguenza devono avere congruenti anche le ipotenuse SP e RQ, le quali sono le diagonali del rettangolo.

Sia RPQS un parallelogramma avente le diagonali RQ e PS congruenti, sempre confrontando i triangoli SRP e RPQ, possiamo affermare che tali triangoli sono congruenti per il terzo criterio, perché hanno il lato RP in comune, i lati RS e QP congruenti in quanto lati opposti di un parallelogramma ed i lati SP e RQ congruenti per ipotesi. Dunque anche gli angoli devono essere ordinatamente congruenti, in particolare $S\widehat{R}P \cong R\widehat{P}Q$ perché opposti ai lati congruenti SP e RQ. Ma tali angoli sono anche supplementari in quanto adiacenti allo stesso lato RP di un parallelogramma, e pertanto devono risultare retti. Dunque il quadrilatero RPSQ è un rettangolo.

TEOREMA. In ogni rombo le diagonali sono perpendicolari e sono anche bisettrici degli angoli aventi per vertici i loro estremi. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali perpendicolari è un rombo; inoltre, se un angolo di un parallelogramma è diviso a metà dalla diagonale passante per il suo vertice, allora il parallelogramma è un rombo.

<u>*Dimostrazione*</u>

Notiamo che, in ciascuna delle fasi della dimostrazione, è tra le ipotesi del teorema che JHGK sia un parallelogramma. Ricordiamo che le diagonali di JHGK vengono divise a metà dal loro punto d'intersezione, che chiamiamo M, per cui risulta $JM \cong MG$ e $HM \cong MK$.

(a) Se supponiamo che JHGK sia un rombo, i triangoli JHG, HGK, GKJ, KJH risultano isosceli, per cui le mediane HM, GM, KM, JM sono anche altezze e bisettrici, per cui la prima parte del teorema è dimostrata.

(b) Se supponiamo che JG e HK siano perpendicolari, in particolare i triangoli rettangoli JHM, HGM, GKM, KJM risultano congruenti per il primo criterio, avendo congruenti i cateti. Dunque risultano congruenti anche le ipotenuse, che sono i lati del parallelogramma JHGK, il quale pertanto risulta essere un rombo.

(c) Se supponiamo ad esempio $K\widehat{G}J \cong J\widehat{G}H$, essendo anche $K\widehat{G}J \cong G\widehat{J}H$ in quanto alterni interni rispetto alle rette parallele KG e JH tagliate dalla trasversale GJ, dalla proprietà transitiva della congruenza segue che $G\widehat{J}H \cong J\widehat{G}H$, per cui il triangolo JGH risulta isoscele sulla base JG. Dunque il parallelogramma JHGK ha due lati consecutivi congruenti, e quindi i quattro lati congruenti, ed è pertanto un rombo.

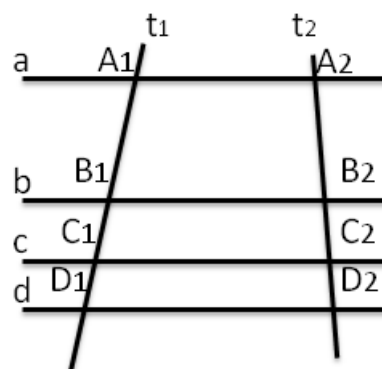
I teoremi precedenti si estendono automaticamente ai quadrati.

COROLLARIO**.** Le diagonali di un quadrato sono fra loro congruenti e perpendicolari e dividono per metà gli angoli. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e perpendicolari, allora è un quadrato; inoltre, se le diagonali di un parallelogramma sono congruenti ed un angolo è diviso a metà da una diagonale, allora il parallelogramma è un quadrato.

►5. Corrispondenza di Talete

Si definisce **fascio improprio** di rette un insieme di rette, in un piano, tutte parallele tra loro.

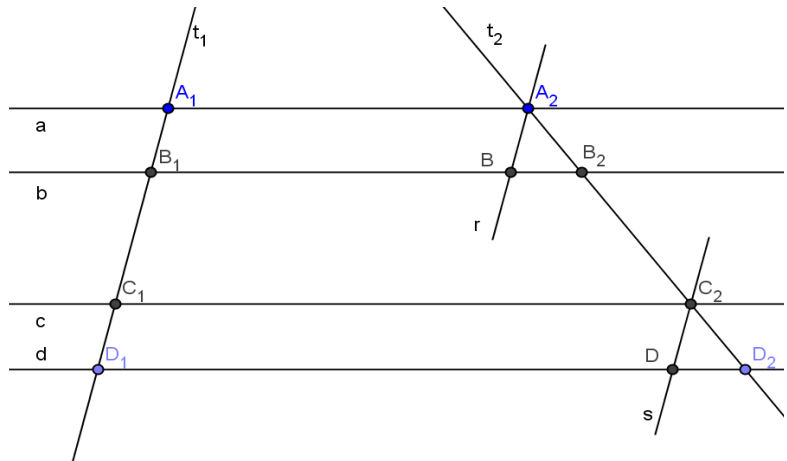
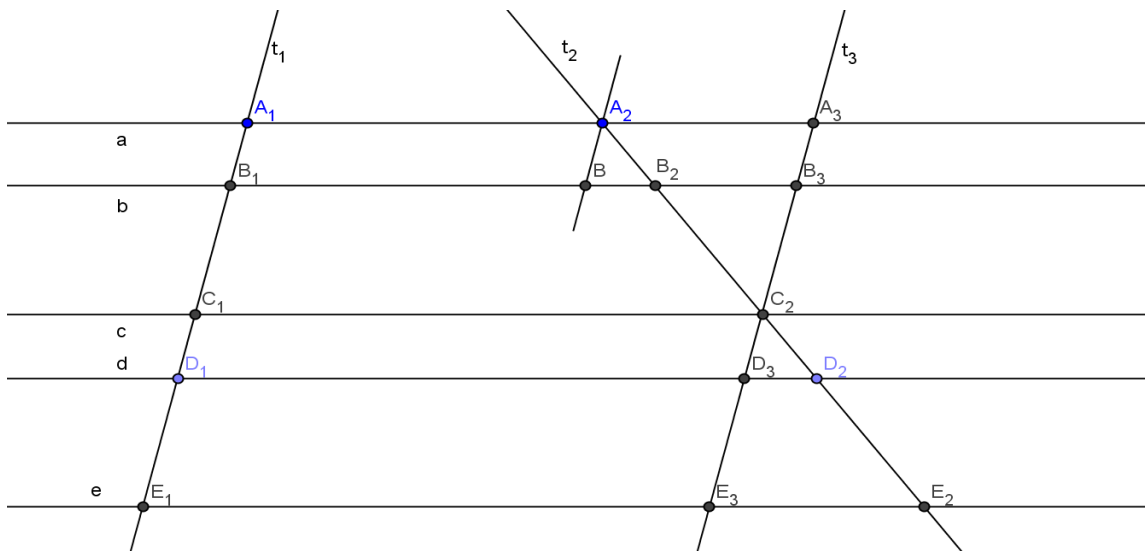
Ricordiamo che una retta contenuta nello stesso piano e non appartenente al fascio improprio è necessariamente incidente rispetto a ciascuna retta del fascio ed ha quindi uno ed un solo punto in comune con ogni singola retta del fascio: una tale retta è dunque una **trasversale.**

Dato un fascio di rette parallele *a*, *b*, *c*, *d*, …, considerate due generiche trasversali t_1, t_2, è possibile definire una funzione tra l'insieme dei punti di una trasversale e l'insieme dei punti dell'altra trasversale che associ a ciascun punto di t_1 il punto di t_2 che appartiene alla medesima retta del fascio (ad esempio al punto A_1 si associa il punto A_2 come in figura se $\{A_1\} = a \cap t_1$ e $\{A_2\} = a \cap t_2$). Tale funzione è una corrispondenza biunivoca e si estende facilmente ai segmenti: infatti l'immagine del segmento A_1B_1 è il segmento A_2B_2 (se, come in figura, anche gli estremi B_1 e B_2 appartengono alla stessa retta *b* del fascio).

La corrispondenza biunivoca così definita tra punti e tra segmenti di due trasversali che tagliano un fascio di rette parallele è detta **corrispondenza di Talete**.

TEOREMA. **Dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.**

Ipotesi: $a // b // c // d$; $t1$, $t2$ trasversali; $A_1B_1 \cong C_1D_1$.

Tesi: $A_2B_2 \cong C_2D_2$.

Dimostrazione. Se fosse $t_1 // t_2$, allora la tesi seguirebbe facilmente dalle proprietà dei quadrilateri particolari e dalla proprietà transitiva della congruenza. Infatti i quadrilateri $A_1B_1B_2A_2$ e $C_1D_1D_2C_2$ sarebbero due parallelogrammi, ed avrebbero dunque i lati opposti congruenti.
Altrimenti, tracciamo la retta r passante per A_2 e la retta s passante per C_2 , entrambe parallele a t_1 ; chiamiamo B il punto d'intersezione tra b ed r e D il punto d'intersezione tra d ed s .
I quadrilateri $A_1B_1BA_2$ e $C_1D_1DC_2$ sono due parallelogrammi, per cui da $A_1B_1 \cong C_1D_1$ segue, per la proprietà transitiva della congruenza, $A_2B \cong C_2D$. Dunque, se confrontiamo i triangoli A_2BB_2 e C_2DD_2 , questi risultano congruenti per il secondo criterio (generalizzato), in quanto gli angoli in A_2 e in C_2 sono corrispondenti rispetto alle rette parallele r, s tagliate dalla trasversale t_2 , mentre gli angoli in B_2 e D_2 sono corrispondenti rispetto alle rette parallele b, d tagliate dalla trasversale t_2 e pertanto congruenti. Di conseguenza $A_2B_2 \cong C_2D_2$ ■

Osservazione. Nella figura precedente, i trapezi $A_1B_1B_2A_2$ e $C_1D_1D_2C_2$ sono stati "decomposti" in parallelogrammi e triangoli. La sostanza del teorema non cambia però se le figure che si ottengono sono diverse.
Nella figura seguente, considerare, oltre alla corrispondenza tra i segmenti su t_1 e t_2 , anche la corrispondenza tra i segmenti su t_1 e t_3 (parallele) e quella tra i segmenti di t_2 e t_3 (con C_3 coincidente con C_2).

►6. Conseguenze della corrispondenza di Talete

COROLLARIO 1. **Se dal punto medio di un lato di un triangolo mandiamo la parallela ad un altro lato del triangolo, questa interseca il terzo lato nel suo punto medio.**

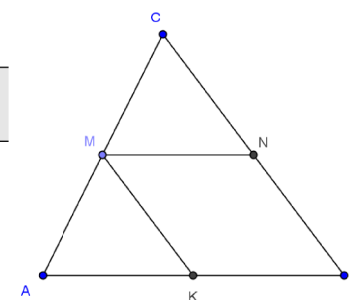
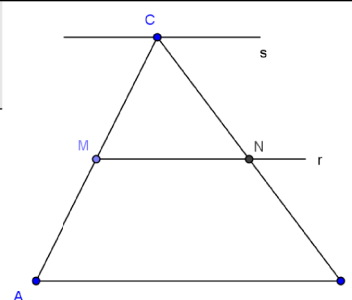
Dimostrazione

Sia M il punto medio di AC, sia r la parallela ad AB passante per M, sia N il punto d'intersezione tra r e CB, sia s la parallela ad AB passante per C. Per la corrispondenza di Talete, risulta $CN \cong NB$, per cui N è il punto medio di CB■

Dalla corrispondenza di Talete e dal Corollario precedente segue il seguente:

COROLLARIO 2. **Il segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.**

Dimostrazione

Sia M il punto medio di AC e sia N il punto medio di CB. Poiché, per il corollario precedente, la parallela ad AB passante per M passa anche per N, il segmento MN è parallelo ad AB (in quanto una retta è ben individuata da due punti ed inoltre, per il quinto postulato di Euclide, esiste una ed una sola retta passante per M e parallela ad AB); resta da dimostrare che MN ≅ ½ AB . Sempre per il corollario precedente, se da M mandiamo la parallela a CB, questa interseca AB nel suo punto medio (lo chiamiamo K). Il quadrilatero MKBN è un parallelogramma, in quanto ha i lati opposti paralleli. Per le proprietà dei parallelogrammi, MN ≅ KB = ½ AB ■

2 Vero o Falso?

a) Un quadrilatero che ha i lati consecutivi a due a due congruenti è un deltoide [V] [F]
b) Un quadrilatero che ha una sola coppia di lati opposti uguali è un trapezio [V] [F]
c) Il trapezio scaleno ha tutti i lati diversi tra di loro per lunghezza [V] [F]
d) Gli angoli adiacenti alla base maggiore di un trapezio rettangolo sono uno retto e uno acuto [V] [F]
e) Un trapezio scaleno può avere due angoli opposti ottusi [V] [F]
f) In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base minore sono ottusi [V] [F]
g) In un trapezio isoscele sono congruenti le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore [V] [F]
h) Le diagonali di un deltoide si incontrano nel loro punto medio comune [V] [F]
i) Nel parallelogramma gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari [V] [F]
l) Nel parallelogramma una delle due diagonali lo divide in due triangoli isosceli [V] [F]
m) Se le diagonali di un quadrilatero si dividono a metà allora è un parallelogramma [V] [F]
n) Le diagonali del rombo sono anche bisettrici [V] [F]
o) Se le diagonali di un parallelogramma sono uguali il parallelogramma è un quadrato [V] [F]
p) Un parallelogramma che ha un angolo retto è un rettangolo [V] [F]
q) Un parallelogramma che ha due lati consecutivi congruenti è un quadrato [V] [F]
r) Un quadrilatero con due lati opposti congruenti è un trapezio [V] [F]
s) Un quadrangolo convesso è un parallelogramma se e solo se le sue diagonali si incontrano nel loro punto medio comune. [V] [F]
t) Un quadrilatero convesso è tale che i punti medi dei suoi lati sono vertici di un quadrato, allora il quadrilatero deve essere necessariamente un quadrato [V] [F]
u) Il rombo è anche un rettangolo [V] [F]
v) Il rombo è anche quadrato [V] [F]
w) Il rettangolo è anche parallelogrammo [V] [F]
x) Il quadrato è anche rombo [V] [F]
y) Il trapezio è anche parallelogrammo [V] [F]
z) Alcuni rettangoli sono anche rombi [V] [F]

3 Due parallelogrammi sono congruenti se hanno congruenti due lati consecutivi e l'angolo compreso.

4 Due rettangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati consecutivi.

5 Due rombi sono congruenti se hanno congruenti le due diagonali.

6 Le diagonali di un trapezio isoscele si dividono in parti rispettivamente congruenti.

7 In un trapezio isoscele, la retta che congiunge i punti medi delle basi è perpendicolare alle basi stesse, ed interseca le rette dei lati obliqui nel loro punto d'intersezione.

8 Se un trapezio ha tre lati congruenti, le diagonali sono bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

9 Dimostra che un rombo è diviso da una sua diagonale in due triangoli isosceli congruenti.

10 In un triangolo ABC prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che il quadrilatero ABCD è un parallelogramma.

11 Sia ABCD un parallelogramma, siano M, N, O, P i punti medi dei lati. Dimostra che MNOP è un parallelogramma.

12 Nel parallelogramma ABCD prolunga di segmenti congruenti ciascun lato e sempre nello stesso senso. Dimostra che i nuovi vertici che si ottengono formano un parallelogramma.

13 Nel parallelogramma ABCD si prendono sui lati opposti AB e CD i punti E ed F tali che AE sia congruente a CF. Dimostra che anche AECF è un parallelogramma.

14 Di un triangolo ABC prolunga i lati AB e CB rispettivamente di due segmenti BD e BE tali che $AB \cong BD$ e $CB \cong BE$. Dimostra che ACDE è un parallelogramma.

15 Unendo i punti medi di due lati opposti di un parallelogramma si ottengono due parallelogrammi.

16 Sulle diagonali AC e BD di un parallelogramma prendi i punti A' e C' su AC in modo che $AA' \cong CC'$ su BD prendi i punti B' e D' in modo che $BB' \cong DD'$. Dimostra che A'B'C'D' è un parallelogramma.

17 Dato un parallelogramma ABCD prolunga il lati nel seguente modo: CD di un segmento DE, DA di un segmento DF, AB di un segmento BG, BC di un segmento CH. Dimostra che se $DE \cong AF \cong BG \cong CH$ allora EFGH è anche un parallelogramma.

18 Dato un segmento AB, sia M il suo punto medio. Manda rispettivamente da A e da B le rette r e s parallele tra di loro. Dal punto M traccia una trasversale t alle due rette che incontra r in C e s in D. Dimostra che CADB è un parallelogramma.

19 Dimostra che in un parallelogramma ABCD i due vertici opposti A e C sono equidistanti dalla diagonale BD.

20 Prolunga la mediana AM di un triangolo isoscele di vertice A di un segmento MD congruente ad AM, dimostra che ABCD è un rombo.

21 Nel parallelogramma ABCD sia M il punto medio di AB e N il punto medio di DC. Sia P il punto di intersezione di AN con DM e Q il punto di intersezione di CM con BN. Dimostra che PNAM è un rombo.

22 Dimostra che se un rombo ha le diagonali congruenti allora è un quadrato.

23 Dimostra che congiungendo i punti medi dei lati di un rettangolo si ottiene un rombo.

24 Dato un parallelogramma ABCD, siano H e K due punti della diagonale AC in modo che DH e BK siano perpendicolari ad AC. Dimostra che AH è congruente a KC.

25 Sia ABCD un trapezio di basi BC e AD. Sia r la bisettrice all'angolo in A e s la bisettrice all'angolo in B. Dimostra che r e s sono perpendicolari.

26 Nel parallelogramma ABCD prolunga il lato AB del segmento AE e il lato DC del segmento CF congruente ad AE. Dimostra che anche EBFD è un parallelogramma.

27 In un trapezio ABCD la diagonale AC è congruente alla base maggiore AB. Sia M il punto medio del lato obliquo BC. Prolunga AM di un segmento ME congruente ad Am. Dimostra che ABEC è un rombo.

28 Nel trapezio isoscele ABCD con la base maggiore doppia della base minore unisci il punto medio M di AB con gli estremi della base DC. Dimostra che AMCD è un parallelogramma.

29 Nel trapezio isoscele ABCD i punti M e N sono rispettivamente i punti medi delle basi AB e DC. Dimostra che MNCB è un trapezio rettangolo.

30 Siano M e N i punti medi dei lati obliqui di un trapezio isoscele, dimostra che BCMN è un trapezio isoscele.

31 Nel triangolo isoscele ABC siano BH e BK le perpendicolari ai lati obliqui AC e AB. Dimostra che BCHK è un trapezio isoscele.

32 Dimostra che le proiezioni dei lati obliqui di un trapezio isoscele sulla base maggiore sono congruenti.

33 Nel triangolo isoscele ABC, di base BC traccia le bisettrici agli angoli adiacenti alla base. Detti D ed E i punti di incontro di dette bisettrici rispettivamente con AC e AB, dimostra che EBCD è un trapezio isoscele.

34 Dimostra che in un trapezio isoscele che ha la base maggiore doppia della minore, le diagonali sono

anche bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

35 In un trapezio, il segmento che unisce i punti medi dei lati obliqui è parallelo alle basi e congruente alla loro semisomma.

36 Dato un qualsiasi quadrilatero ABCD, il quadrilatero non intrecciato avente come vertici i punti medi dei lati di ABCD è un parallelogramma.

37 Il quadrilatero avente come vertici i punti medi dei lati di un trapezio isoscele è un rombo.

38 Dimostrare che, in un trapezio, il segmento che congiunge i punti medi dei lati non paralleli è uguale alla semisomma delle basi.

39 Dato un parallelogramma ABCD, si consi-deri M il punto medio del lato AB, si congiunga il vertice D con il punto M, si congiunga il vertice A con il punto medio N del segmento DM. Dimostrare che la retta AN divide la diagonale DB del parallelogramma in due parti di cui una è il doppio dell'altra.

40 Dato un triangolo qualunque ABC, si consideri M il punto medio del lato AB, si consideri il segmento parallelo al lato BC che parte da M ed incontra il lato AC nel punto N, si prolunghi questo segmento di un segmento ND uguale ad MN. Dimostrare che il quadrilatero MDCB è un parallelogramma.

41 Dato un quadrato (ABCD) di centro O. Siano H e K due punti sulla diagonale AC simmetrici rispetto ad O. Dimostra che il quadrilatero (BHDK) è un rombo.

42 Dimostrare che un trapezio è isoscele se il punto medio della sua base maggiore è equi-distante dagli estremi della base minore.

43 In un trapezio isoscele ABCD (con base maggiore AB e lati obliqui congruenti BC e AD) sia M il punto medio della base maggiore; prolungare MC e MD rispettivamente dei segmenti CE e DF fra loro congruenti. Dimostrare che il quadrilatero ABEF è un trapezio isoscele.

44 Nel parallelogramma ABCD si traccino da A e da B le perpendicolari alla diagonale BD; siano rispettivamente E ed F i punti di intersezione delle perpendicolari con la diagonale. Dimostra che DE è congruente a FB e che AFCE è un parallelogramma.

45 Dato un parallelogramma ABCD, si consideri M il punto medio del lato AB, si congiunga il vertice D con il punto M, si congiunga il vertice A con il punto medio N del segmento DM. Dimostrare che la retta AN divide la diagonale DB del parallelogramma in due parti di cui una è il doppio dell'altra. 3.

46 Dato un triangolo qualunque ABC, si consideri M il punto medio del lato AB, si consideri il segmento parallelo al lato BC che parte da M ed incontra il lato AC nel punto N, si prolunghi questo segmento di un segmento ND uguale ad MN. Dimostrare che il quadrilatero MDCB è un parallelogramma.

47 Dato un quadrato ABCD di centro O, siano H e K due punti sulla diagonale AC simmetrici rispetto ad O. Dimostra che il quadrilatero BHDK è un rombo.

48 Le diagonali di un trapezio isoscele, dividono il trapezio in quattro triangoli, dei quali due triangoli sono isosceli e aventi gli angoli ordinatamente congruenti, mentre gli altri due triangoli sono congruenti.

49 Dimostra che il quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un quadrilatero qualunque è un parallelogramma.

50 * Dimostra che congiungendo i punti medi dei lati di un rombo si ottiene un rettangolo.

51 * Dimostra che congiungendo i punti medi dei lati di un rettangolo si ottiene un rombo.

52 * Dato un parallelogramma ABCD, dimostrare che i vertici opposti B e D sono equidistanti dalla diagonale AC.

53 * Sia ABCD un parallelogramma ed E il punto medio del lato AB. Le rette DE e BC si incontrano in T. Dimostrare che DBTA è un parallelogramma.

54 * Dato un parallelogramma ABCD, si prendano sui lati opposti AB e CD due segmenti congruenti AE e CF. Dimostrare che DEBF è un parallelogramma.

55 * Sia ABCD un parallelogramma; le bisettrici degli angoli in A e in B si incontrano nel punto F di CD. Dimostrare che $AB \cong 2BC$.

56 * Nel trapezio ABCD le bisettrici degli angoli alla base maggiore si incontrano nel punto E della base minore. Dimostrare che la base minore è congruente alla somma dei lati obliqui. Supposto, infine, che il trapezio sia isoscele, dimostrare che E è punto medio della base minore.

57 * Dimostrare che, se un parallelogramma ha le altezze relative a due lati consecutivi congruenti, allora esso è un rombo.

58 * Dimostrare che, se in un trapezio le bisettrici degli angoli adiacenti alla base minore si intersecano in un punto della base maggiore, allora la base maggiore è congruente alla somma dei lati obliqui.

59 * Sia dato un rombo ABCD e sia O il punto d'intersezione delle diagonali. Prendiamo un punto E appartenente al segmento AO ed un punto F appartenente al segmento CO tali che i segmenti AE e CF siano congruenti. Dimostrare che il quadrilatero EBFD è un rombo.

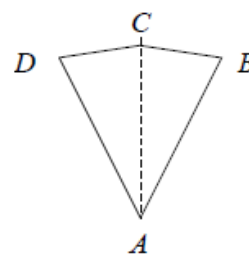
60 * Dato un trapezio isoscele ABCD con le diagonali perpendicolari, dimostrare che il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati del trapezio è un quadrato.

61 * Sia dato un triangolo ABC e sia AL la bisettrice dell'angolo in A. Sia P il punto d'intersezione con il lato AC della retta per L parallela al lato AB e sia Q il punto d'intersezione con il lato AB della retta per L parallela al lato AC. Dimostrare che il quadrilatero LPAQ è un rombo.

62 * Disegna un triangolo isoscele FAD di base FA. Prolunga il lato FD di un segmento DC congruente a FD, congiungi C con A. Dimostra che il triangolo FAC è rettangolo. Indica con M il punto medio di AC e congiungi M con D. Dimostra che DM è contenuto nell'asse del segmento AC. Con centro in A e raggio AD traccia un arco che incontra il prolungamento di DM nel punto B, dimostra che il quadrilatero ABCD è un rombo.

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 175-176; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da
http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

Quesiti dalle prove INVALSI

63 Il quadrilatero seguente è simmetrico rispetto alla retta AC.
Sapendo che BÂC = 30°, CDA = 70°, quanto vale BĈD?
A. 140°
B. 150°
C. 160°
D. 165°
E. Le informazioni sono insufficienti.
(Prove INVALSI 2003)

64 Quale fra le seguenti proprietà è falsa per tutti i parallelogrammi?
A. I lati opposti sono uguali.
B. Gli angoli adiacenti sono supplementari.
C. Gli angoli opposti sono supplementari.
D. I lati opposti sono paralleli.
E. Le diagonali si dimezzano scambievolmente.
(Prove INVALSI 2003)

65 Quale tra le seguenti affermazioni riferite ad un parallelogramma qualsiasi è FALSA?
A. I lati opposti sono paralleli.
B. Le diagonali sono uguali.
C. Gli angoli opposti sono uguali.
D. Ogni diagonale divide il parallelogramma in due triangoli uguali.
(*Prove INVALSI 2004*)

66 Quale tra le seguenti affermazioni relative ad un rombo è FALSA?
A. Non ha i lati opposti paralleli.
B. Ha tutti i lati uguali.
C. Ha gli angoli opposti uguali
D. Ha le diagonali perpendicolari.
(*Prove INVALSI 2005*)

67 Quale fra le seguenti condizioni è sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo?
A. I lati opposti siano uguali e un angolo sia retto.
B. Le diagonali si dividano a metà.
C. I lati opposti siano paralleli.
D. Le diagonali siano uguali e un angolo sia retto.
(*Prove INVALSI 2005*)

68 Quale fra le seguenti affermazioni è FALSA se riferita ad un parallelogramma qualsiasi?
A. I lati opposti sono uguali.
B. Gli angoli opposti sono uguali.
C. Ogni diagonale lo divide in due triangoli uguali.
D. Le diagonali sono uguali.
(*Prove INVALSI 2005*)

69 Quale fra le seguenti affermazioni è vera?

Il quadrilatero avente i vertici nei punti medi dei lati di…

A. un rettangolo qualsiasi è sempre un quadrato
B. un trapezio isoscele qualsiasi è un rettangolo
C. un quadrilatero qualsiasi è un parallelogramma
D. un quadrato è un rombo, ma non un quadrato.

(*Prove INVALSI 2006*)

70 Quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

A. Ogni rettangolo è anche un rombo
B. Ogni rettangolo è anche un parallelogramma
C. Ogni quadrato è anche un rombo
D. Ogni rettangolo ha le diagonali uguali.

(*Prove INVALSI 2007*)

71 È dato un quadrilatero con le diagonali perpendicolari che si dimezzano scambievolmente.

Alberto afferma: "Di sicuro si tratta di un quadrato".
Barbara afferma: "Non è detto che sia un quadrato, ma di sicuro è un rombo".
Carla afferma: "Non è detto che sia un quadrato, ma di sicuro è un rettangolo".
Daniele afferma: "Si tratta certamente di un quadrilatero a forma di aquilone".
Chi ha ragione?

A. Alberto. B. Barbara. C. Carla. D. Daniele.

(*Prove INVALSI 2007*)

MATEMATICA C3 - GEOMETRIA
5. CIRCONFERENZA

Circle di Howard Dickins
http://www.flickr.com/photos/dorkomatic/4551822855/

Indice

►1. Luoghi geometrici

DEFINIZIONE. Nel piano, si dice **luogo geometrico** l'insieme di tutti e soli i punti del piano che verificano una proprietà, detta proprietà caratteristica del luogo geometrico.

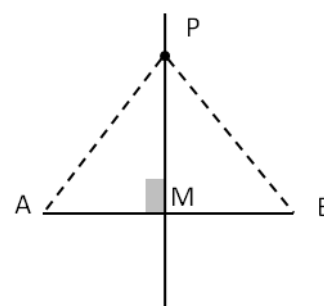
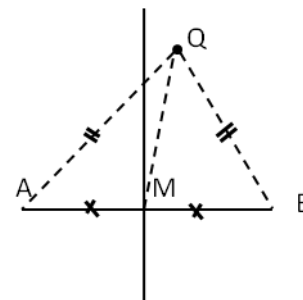
Ad esempio,

- l'**asse di un segmento** è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento;
- la b**isettrice di un angolo** è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

Se consideriamo la definizione "costruttiva" di asse di un segmento come retta perpendicolare al segmento stesso e passante per il suo punto medio, è possibile dimostrare che la nuova definizione di asse come "luogo geometrico" è equivalente alla precedente.
Vale cioè il seguente

TEOREMA. **Nel piano, il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti dati, A, B, è la retta *r*, perpendicolare al segmento AB e passante per M, punto medio di AB.**

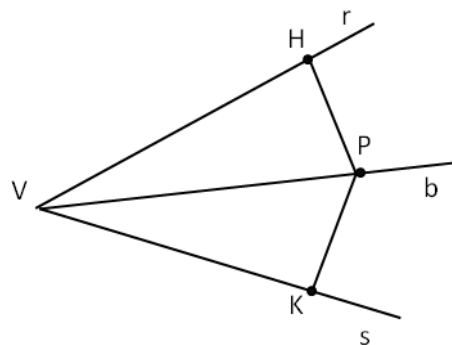
Dimostrazione
Sia r la retta perpendicolare ad AB condotta da M punto medio di AB, dimostriamo che un generico punto $P \in r$ è equidistante da A e B, e viceversa, un generico punto Q tale che $QA \cong QB$ appartiene ad *r*.

Ipotesi: $r \perp AB$; $AM \cong MB$; $P \in r$ *Tesi*: $PA \cong PB$
Dimostrazione.
Uniamo P con A, B ed M. per ipotesi $PM \perp AB$, per cui, nel triangolo PAB, il segmento PM è contemporaneamente altezza e mediana relative al lato AB; pertanto il triangolo PAB è isoscele sulla base AB, da cui la tesi.

Ipotesi: $QA \cong QB$ *Tesi*: $Q \in r$
Dimostrazione.
Uniamo Q con A, B ed M. per ipotesi il triangolo QAB è isoscele sulla base AB; inoltre il segmento QM è la mediana relativa alla base del triangolo isoscele, per cui QM è anche altezza. dunque la retta QM coincide con la retta *r*, cioè l'asse di AB.

Analogamente, se consideriamo la classica definizione di bisettrice di un angolo come la semiretta, interna all'angolo stesso, avente origine nel vertice dell'angolo, tale da dividere l'angolo stesso in due angoli congruenti, possiamo dimostrare che la nuova definizione di bisettrice come luogo geometrico è equivalente alla precedente.
Vale cioè il seguente teorema.

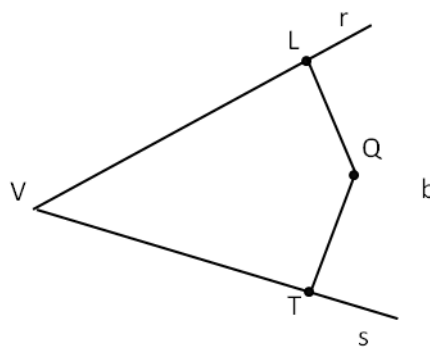
TEOREMA**. La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.**

*Dimostrazione***.**

Sia $r\widehat{V}s$ un angolo (di vertice V e di lati *r* ed *s*) e sia *b* la sua bisettrice (semiretta di origine V che divide l'angolo a metà).
Verifichiamo prima che un generico punto P∈*b* è equidistante da *r* e da *s* .

Ipotesi: $P\in b$; $PK\perp s$; $PH\perp r$; $K\widehat{V}P\cong P\widehat{V}H$.
Tesi: $PK\cong PH$.
Dimostrazione.
Mandiamo da P le perpendicolari ai lati dell'angolo e chiamiamo H∈*r* e K∈*s* i piedi delle due perpendicolari. Osserviamo che i triangoli VPH e VPK, rettangoli rispettivamente in H e K, risultano congruenti perché hanno rispettivamente congruenti l'ipotenusa e un angolo acuto, per i criteri di congruenza sui triangoli rettangoli risultano congruenti. Pertanto i cateti PH e PK, opposti a V, risultano congruenti, da cui la tesi (P equidistante da *r* e da *s*).

Ovviamente, un qualsiasi punto appartenente ad una delle due semirette *r* o *s* che non sia il vertice V non può essere equidistante da *r* e da *s*, mentre il punto V lo è (ha distanza nulla da entrambe).

Verifichiamo ora che, se Q è un generico punto interno all'angolo $r\widehat{V}s$, se Q è equidistante da *r* e da *s*, deve risultare Q∈*b*.
IPOTESI: $PK\perp s$; $PH\perp r$; $PK\cong PH$.
TESI: $K\widehat{V}P\cong P\widehat{V}H$.

Dimostrazione. Infatti, se mandiamo da Q le perpendicolari alle semirette *r* ed *s* e chiamiamo L∈*r*, T∈*s* i piedi delle perpendicolari, per ipotesi risulta QL≅QT. Se uniamo Q con V, si vengono a formare due triangoli rettangoli QLV e QTV con l'ipotenusa QV in comune ed una coppia di cateti congruenti. Tali triangoli risultano pertanto congruenti per il quarto criterio (più semplicemente per il criterio particolare dei triangoli rettangoli), e di conseguenza $L\widehat{V}Q\cong Q\widehat{V}T$, per cui la semiretta VQ coincide con la bisettrice *b*.

1 Il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da due rette incidenti (con il punto P in comune) è l'unione delle due rette, perpendicolari tra loro, che costituiscono le quattro bisettrici degli angoli (di vertice P) individuati dalle due rette.

2 Il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da due rette parallele e distinte (r ed s) è la retta t, parallela ad entrambe, interna alla striscia di piano compresa tra r ed s, che divide la striscia in due strisce congruenti.

3 Dagli estremi B e C della base di un triangolo isoscele ABC condurre le perpendicolari al lato obliquo, più precisamente, per B condurre la perpendicolare ad AB, per C la perpendicolare ad AC. Detto D il punto in cui si incontrano le due perpendicolari, dimostrare che AD è asse di BC.

4 Nel triangolo ABC con AB maggiore di AC, condurre la bisettrice AD dell'angolo in A. Da punto D traccia una retta che incontri AB nel punto E, in modo che $A\widehat{D}C \cong A\widehat{D}E$. Dimostra che AD è asse di CE.

5 * Dimostrare che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

6 * Sia ABC un triangolo qualunque e sia CH l'altezza relativa ad AB. Si prolunghi l'altezza CH, dalla parte di H, di un segmento $HD \cong CH$ e si congiunga D con A e B. Dimostrare che i triangoli ADC e DBC sono isosceli.

7 * Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Prolunghiamo il lato AC, dalla parte di C, di un segmento $CD \cong AC$, quindi congiungiamo D con B. Sia, ora, M il punto medio del segmento BD. Dimostrare che CM è perpendicolare a BD.

8 * Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C. Si consideri l'angolo esterno relativo all'angolo interno in C e si dimostri che la sua bisettrice è perpendicolare all'altezza relativa alla base AB.

9 * Dimostrare che in triangolo equilatero le bisettrici degli angoli interni coincidono con le mediane e le altezze.

10 * Dal punto P della bisettrice dell'angolo $a\hat{O}b$ condurre due semirette che formano angoli congruenti con la bisettrice, in semipiani opposti rispetto ad essa. La prima semiretta incontra il lato a in A mentre la seconda incontra il lato b in B. Dimostrare che la bisettrice OP è asse del segmento AB.

11 * Sui lati a e b dell'angolo convesso $a\hat{O}b$ si scelgano rispettivamente due punti A e B tali che $OA \cong OB$. Da A si conduca il segmento perpendicolare a b in C, e da B il segmento perpendicolare ad a in D. I segmenti AC e BD s'incontrano in E. Dimostrare che OE è bisettrice dell'angolo $a\hat{O}b$.

12 * Dimostrare che un triangolo è isoscele se, e solo se, è dotato almeno di un asse di simmetria. In particolare, dimostrare che un triangolo è equilatero se, e solo se, è dotato di tre assi di simmetria.

13 * Sia ABC un triangolo qualunque e sia CH l'altezza relativa ad AB. Si prolunghi l'altezza CH, dalla parte di H, di un segmento $HD \cong CH$ e si congiunga D con A e B. Dimostrare che il quadrilatero ADBC è dotato di asse di simmetria.

14 * Dimostrare che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un cateto e l'ipotenusa.

Gli esercizi contrassegnati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pag. 145, licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

►2. Circonferenza e cerchio: definizioni e prime proprietà

La definizione che ha dato Euclide di circonferenza fa riferimento ai luoghi geometrici: la circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto del piano stesso, detto centro.
Intuitivamente, immaginiamo di fissare su di un piano un chiodo, di legare a questo chiodo una corda e di fissare all'altra estremità della corda una penna. Se facciamo ruotare la penna intorno al chiodo tenendo sempre in tensione la corda descriveremo sul piano una circonferenza.

DEFINIZIONE. Assegnati nel piano un punto C e un segmento AB si chiama **circonferenza** il luogo dei punti del piano che hanno distanza da C congruente al segmento AB. Il punto C viene detto centro della circonferenza, la distanza dei punti della circonferenza dal centro è detta raggio della circonferenza.

Osservazione
Una circonferenza divide il piano in 3 insiemi:

- L'insieme dei punti la cui distanza dal centro è minore del raggio. Questi punti si dicono **interni alla circonferenza**.
- L'insieme dei punti la cui distanza dal centro è uguale al raggio. Essi sono esattamente i **punti della circonferenza**.
- L'insieme dei punti la cui distanza dal centro è maggiore del raggio. Questi punti si dicono **esterni alla circonferenza**.

Se consideriamo l'unione dell'insieme dei punti della circonferenza con l'insieme dei punti interni alla circonferenza otteniamo un cerchio. Allora diamo la seguente:

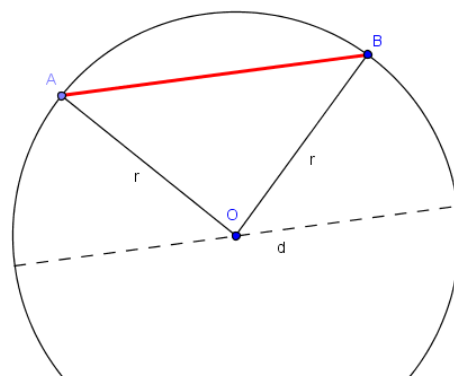
DEFINIZIONE. Chiamiamo **cerchio** la figura formata dai punti di una circonferenza e dai punti interni ad essa.

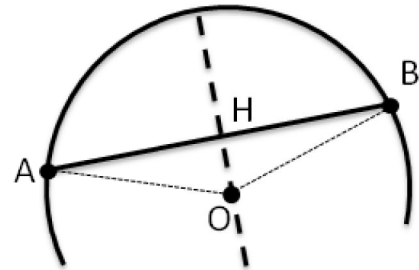
Abbiamo definito la circonferenza come un insieme di punti tutti equidistanti dal centro. Viceversa osserviamo che il centro è l'unico punto del piano equidistante da tutti i punti della circonferenza. Per questo motivo possiamo affermare che una circonferenza è individuata esattamente dal suo centro e dal suo raggio o equivalentemente dal centro e da un suo punto.

DEFINIZIONE. Un segmento che ha come estremi due punti distinti di una circonferenza è detto **corda**. In particolare, una corda che contiene il centro della circonferenza viene definita diametro.

I punti estremi di un diametro vengono detti **diametralmente opposti**.
Ogni diametro è il doppio di un raggio e tutti i diametri della stessa circonferenza sono fra essi congruenti. Il centro della circonferenza è anche il punto medio di ciascun diametro.
Diamo ora alcune importanti proprietà delle corde.

TEOREMA. **Il diametro è la corda di lunghezza massima.**

Dimostrazione
Data una circonferenza di centro O e raggio r, consideriamo una corda qualsiasi AB. Se essa passa per il centro O, coincide con il diametro e dunque $AB = 2r$; altrimenti essa può essere considerata come la base di un triangolo isoscele AOB avente come lati i due raggi OA ed OB. In tal caso per la disuguaglianza triangolare un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due lati e dunque possiamo scrivere: $AB < OA + OB$ ovvero $AB < 2r$.
In conclusione, il diametro è maggiore di qualunque altra corda che non passa per il centro■

TEOREMA. **L'asse di una corda qualsiasi passa per il centro della circonferenza.**

<u>*Ipotesi*</u>: A e B due punti distinti appartenenti alla circonferenza; a asse della corda AB.
<u>*Tesi*</u>: l'asse passa per il centro della circonferenza.
<u>*Dimostrazione*</u>
Congiungiamo A e B con il centro O della circonferenza. Poiché OA e OB sono raggi della circonferenza, il triangolo AOB è isoscele sulla base AB. Ricordiamo che l'asse relativo alla base di un triangolo isoscele contiene l'altezza (in figura OH). Dunque O appartiene all'asse a.
Se la corda AB coincide con un diametro, O ne è il punto medio; ma l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio, dunque anche in questo caso l'asse passa per il centro O della circonferenza■

TEOREMA. **Un diametro passante per il punto medio di una corda è perpendicolare alla corda stessa.**

<u>*Dimostrazione*</u>**:** In riferimento alla figura precedente e al teorema appena dimostrato, il diametro passa per ipotesi dal punto medio H della corda AB e per definizione da O, centro della circonferenza nonché vertice del triangolo isoscele AOB. Dunque OH è mediana del triangolo AOB relativamente alla base AB. Per il teorema sul triangolo isoscele, la mediana relativa alla base di un triangolo isoscele è anche altezza e quindi il diametro è perpendicolare alla corda AB■

TEOREMA. **In una circonferenza, corde congruenti hanno eguale distanza dal centro (e viceversa).**

<u>*Ipotesi*</u>:

- $AB \cong CD$ corde congruenti
- $OH \perp AB$ OH distanza della corda AB dal centro O
- $OK \perp CD$ OK distanza della corda CD dal centro O

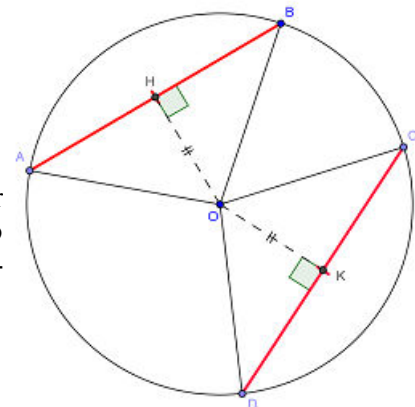
<u>*Tesi*</u>: $OH = OK$

<u>*Dimostrazione*</u>:
Consideriamo triangoli isosceli AOB e COD; essi sono congruenti per il III criterio di congruenza poiché per ipotesi le basi AB e CD sono congruenti e i lati AO, OB, OC, OD sono tutti raggi della circonferenza.
Di conseguenza anche le altezze OH e OK sono congruenti.

<u>*Ipotesi*</u>:

- $OH = OK$ le distanze delle corde AB e CD dal centro O sono congruenti
- $OH \perp AB$ OH distanza della corda AB dal centro O
- $OK \perp CD$ OK distanza della corda CD dal centro O

<u>*Tesi*</u>: $AB \cong CD$

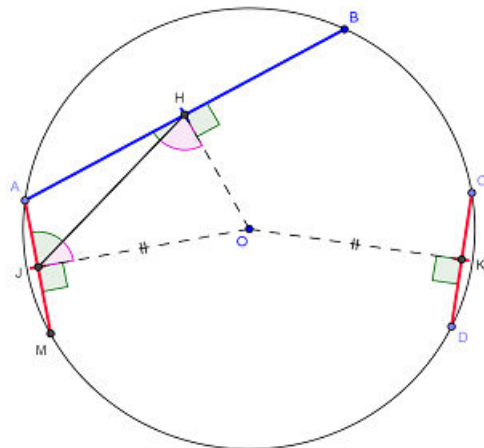
<u>*Dimostrazione*</u>
Consideriamo i triangoli rettangoli AOH e DOK. AO = DO = r (raggio della circonferenza) e OH = OK per ipotesi; per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, i due triangoli sono congruenti, e quindi AH = DH. Allo stesso modo possiamo dimostrare che i triangoli rettangoli BOH e COK sono congruenti, per cui BH = CK. Dunque AB = AH + BH = DK + CK = CD■

TEOREMA. **Fra due corde diseguali, è maggiore quella che ha distanza minore dal centro (e viceversa).**

Ipotesi:

- $AB > CD$ corde diseguali
- $OH \perp AB$ OH distanza della corda AB dal centro O
- $OK \perp CD$ OK distanza della corda CD dal centro O

Tesi: $OH < OK$

Dimostrazione

A partire dal punto A e allontanandosi dal punto B si tracci la corda AM, consecutiva alla corda AB, in modo che AM = CD. Detta OJ la distanza della corda AM dal centro O, si ha che OJ ⊥ AM. Per il teorema precedente, essendo CD e AM corde congruenti, sarà OJ = OK; dunque basterà dimostrare che OH < OJ. Per ipotesi AB > CD, dunque AB > AM. Il senso di tale diseguaglianza vale anche per le rispettive metà dei segmenti AB e AM, per cui AH > AJ (H è il punto medio di AB e J è il punto medio di AM perché i triangoli AOB e AOM sono isosceli sulle basi AB e AM, per cui OH ed OJ, altezze relative alle basi, sono anche mediane).

Si congiunga J con H e si consideri il triangolo HAJ. A lato maggiore si oppone angolo maggiore (per le disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo) per cui $H\hat{J}A > A\hat{H}J$; i rispettivi angoli complementari sono diseguali in verso opposto, quindi $H\hat{J}O < O\hat{H}J$. Relativamente al triangolo HOJ, poiché ad angolo minore si oppone lato minore (sempre per le disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo, proprietà inversa della precedente), possiamo concludere che OH < OJ.

Viceversa

Ipotesi:

- $OH \perp AB$ OH distanza della corda AB dal centro O
- $OK \perp CD$ OK distanza della corda CD dal centro O
- $OH < OK$ distanze diseguali

Tesi: $AB > CD$

Dimostrazione

Utilizziamo un metodo simile alla dimostrazione per assurdo, come abbiamo già fatto per la dimostrazione delle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo: esaminiamo tutti i casi possibili ed escludiamo i casi che contraddicono il teorema precedente ed il primo caso di questo teorema.

Sono possibili le seguenti relazioni tra le lunghezze delle corde AB e CD:

1) AB = CD; 2) AB < CD; 3) AB > CD.

Se fosse vera la relazione 1), per il teorema precedente risulterebbe OH = OK, contro l'ipotesi.

Se fosse vera la 2), per la prima parte di questo stesso teorema risulterebbe OH > OK, contro l'ipotesi.

Rimane solo la possibilità che valga la relazione 3), la quale non è in contraddizione con la prima parte del teorema e che anzi la conferma. Dunque la tesi è verificata■

Osservazioni

- **Fissato un punto P, per esso passano infinite circonferenze.**

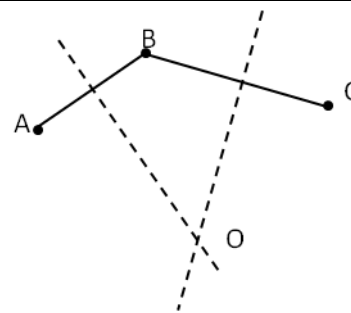
Infatti basta considerare un qualunque altro punto O. Quest'ultimo è il centro di una circonferenza di raggio OP.

- **Per due punti fissati A e B passano infinite circonferenze.**

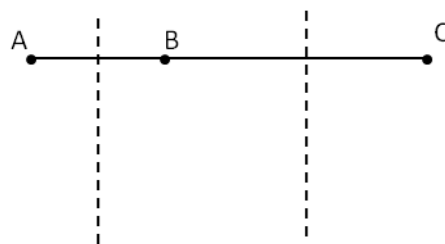
Infatti tutti i punti dell'asse del segmento AB sono equidistanti da A e da B e dunque sono centri di circonferenze passanti per A e per B.

DEFINIZIONE. L'insieme di tutte le circonferenze passanti per A e per B è detto **fascio di circonferenze**. Chiamiamo A e B punti base del fascio e, la retta per A e B asse radicale e infine chiamiamo asse centrale l'asse del segmento AB che contiene tutti i centri delle circonferenze del fascio.

TEOREMA. **Per tre punti distinti non allineati passa una ed una sola circonferenza.**

Dimostrazione.
Siano A,B,C tre punti non allineati, congiungiamo A con B e B con C. Allora gli assi dei segmenti AB e BC si intersecheranno in un punto O. Per la proprietà degli assi il punto O, appartenendo a entrambi gli assi, è equidistante dai punti A, B, C. Allora si può costruire una circonferenza con centro in O e raggio OA. Questa circonferenza passa per A, per B e per C, inoltre è unica perché è unico l'asse di un segmento e di conseguenza è unico il punto di intersezione tra i due assi■

Osservazione
L'ipotesi che i punti siano non allineati è essenziale. Seguendo le linee della dimostrazione, i segmenti AB e BC sono consecutivi ma non adiacenti, cosa essenziale per affermare che i rispettivi assi non sono paralleli. Vale infatti anche la seguente proprietà:

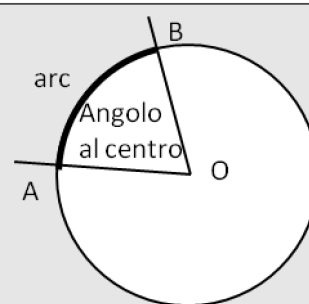
TEOREMA. **Dati tre punti distinti A, B, C, appartenenti ad una stessa retta, non esiste alcuna circonferenza che passa per A, B, C.**

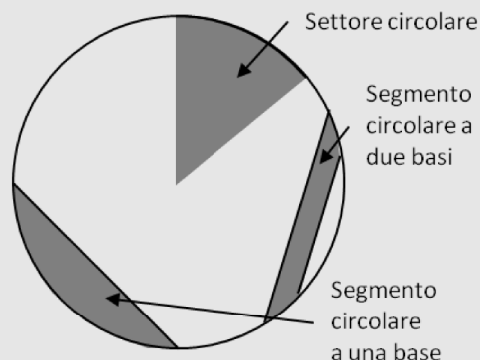
Dimostrazione. Verifichiamo che non esiste alcun punto del piano individuato da A, B, C che possa essere il centro di una tale circonferenza, cioè che sia equidistante dai tre punti.
Supponendo per assurdo che esista un tal punto O, questo, dovendo essere equidistante da A e da B, dovrebbe appartenere all'asse del segmento AB (luogo dei punti equidistanti dagli estremi), e, per ragioni analoghe, dovrebbe appartenere anche all'asse del segmento BC. Ma i punti A, B, C sono distinti per ipotesi, in particolare A e C non sono sovrapposti. Quindi, detto M il punto medio di AB ed N il punto medio di BC, M ed N sono anch'essi distinti, e pertanto gli assi dei segmenti AB, BC non possono essere coincidenti; inoltre gli assi dei segmenti AB, BC sono entrambi perpendicolari alla stessa retta che contiene i tre punti A, B, C, e quindi sono paralleli tra loro; essendo dunque rette parallele e distinte, i due assi non hanno punti in comune, e pertanto non può esistere un punto O che possa essere il centro della circonferenza passante per A,B,C.

COROLLARIO. **Tre punti qualsiasi appartenenti ad una circonferenza non sono allineati.**

A conclusione di queste prime proprietà, possiamo enunciare il seguente

COROLLARIO. **Una circonferenza è determinata univocamente o dal suo centro e dal suo raggio o da tre suoi punti.**

Diamo ora la definizione di alcune parti del cerchio e della circonferenza. Ne esamineremo le proprietà in seguito.

DEFINIZIONI
Data una circonferenza di centro O chiamiamo **angolo al centro** un qualunque angolo con vertice in O.
L'intersezione della circonferenza con un angolo al centro γ é detta **arco**.
Diremo anche che l'angolo γ **insiste sull'arco**.
I punti di intersezione della circonferenza con i lati dell'angolo si dicono estremi dell'arco.
Un arco individuato da un angolo al centro piatto si chiama **semicirconferenza**.

Ogni coppia di punti distinti su una circonferenza individua due archi sulla medesima circonferenza. Infatti se consideriamo A e B ottenuti come nella definizione precedente questi punti individuano l'arco su cui insiste l'angolo γ ma anche la restante parte di circonferenza che è pure un arco.
Congiungendo A con B il segmento AB è una corda della circonferenza. Diremo che la corda AB sottende l'arco $\widehat{AB}$ o viceversa che l'arco insiste sulla corda.
Se in particolare i punti A e B sono diametralmente opposti essi individuano sulla circonferenza due archi che sono due semicirconferenze.

DEFINIZIONI
Si dice **settore circolare** l'intersezione di un cerchio con un suo angolo al centro. Se l'angolo al centro è piatto di parla di semicerchio.
Si chiama invece **segmento circolare ad una base** la parte di cerchio limitata da una corda e da un arco che vi insiste. La corda viene detta base del segmento circolare.
La parte di cerchio limitata da due corde parallele è detta **segmento circolare a due basi**. Le due corde prendono il nome di basi del segmento circolare e la loro distanza si dice altezza del segmento circolare.

Ogni corda divide il cerchio in due segmenti circolari ad una base.
In particolare se la corda è un diametro otteniamo due semicerchi.
Un semicerchio quindi è sia un particolare settore circolare sia un particolare segmento circolare. È anche l'unico caso possibile di settore che sia anche segmento o viceversa.
Una coppia di corde parallele individua in un cerchio un segmento circolare a due basi e due segmenti circolari ad una base (se vogliamo considerare solo le tre parti non sovrapposte che hanno in comune al massimo una corda). Più in generale, date due corde parallele e distinte, queste individuano un segmento circolare a due basi e quattro segmenti circolari ad una base, ed il segmento a due basi è anche l'intersezione dei due segmenti ad una base "sovrapposti".

15 Vero/Falso

a) Si chiama corda il segmento che unisce il centro della circonferenza a un suo punto [V] [F]
b) Si chiama diametro la corda che passa per il centro [V] [F]
c) Si chiama angolo alla circonferenza un angolo che ha i lati sulla circonferenza [V] [F]
d) Si chiama angolo al centro un angolo che ha per vertice il centro della circonferenza [V] [F]
e) Due corde che si trovano alla stessa distanza dal centro sono congruenti [V] [F]
f) L'angolo alla circonferenza è il doppio del corrispondente angolo al centro [V] [F]
g) Una retta è esterna a una circonferenza se la sua distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio [V] [F]
h) Due circonferenze che hanno due punti in comune si dicono concentriche [V] [F]
i) Una retta che passa per il centro della circonferenza è sempre secante [V] [F]
j) Una retta tangente a una circonferenza è sempre perpendicolare al raggio che passa per il punto di tangenza [V] [F]

16 Dimostra che il luogo dei punti medi delle corde tra loro congruenti di una stessa circonferenza è una circonferenza.

17 Sia AB il diametro di una circonferenza. Dagli estremi del diametro si conducano due corde AC e BD tra loro parallele. Dimostra che le due corde sono congruenti e che anche DC è diametro.

18 Sia OAB un triangolo isoscele. Si tracci la circonferenza con centro in O e raggio r minore di OA. Siano C e D i punti di intersezione della circonferenza con i lati obliqui del triangolo isoscele. Dimostra che ABCD è un trapezio isoscele.

19 Siano AB e BC due corde congruenti di una circonferenza di centro O. Dimostra che AO è bisettrice dell'angolo BAC.

20 Sia AB una corda di una circonferenza, sia M il suo punto medio. Sia C un punto di AM e D un punto di MB tali che AC sia congruente a BD. Condurre la C e da D le perpendicolari alla corda AB. Dimostrare che queste perpendicolari incontrandosi con la circonferenza individuano due corde congruenti.

21 Sia AB una corda di una circonferenza di centro O. Si prolunghi AB di un segmento BC congruente al raggio della circonferenza. Dimostrare che l'angolo AOC è il triplo dell'angolo ACO.

22 Siano AB e AC due corde congruenti di una stessa circonferenza. Dimostra che il diametro passante per A è bisettrice dell'angolo alla circonferenza di arco BC.

23 Siano AB e CD due corde congruenti che si intersecano nel punto E. Dimostra che il diametro passante per E è bisettrice dell'angolo AEC.

24 Dimostra che se due corde si incontrano nel loro punto medio comune allora necessariamente le corde sono diametri.

25 Dimostrare che in una circonferenza di diametro AB e centro O il luogo geometrico dei punti medi delle corde con un estremo in A è la circonferenza di diametro AO.

26 * Sia data una circonferenza di centro O e sia P un punto interno ad essa e distinto dal centro. Per P si conducano due corde AB e CD in modo tale che OP risulti bisettrice dell'angolo formato dalle due corde. Dimostrare che $AB \cong CD$.

27 * Sia data una circonferenza di centro O e sia P un punto interno ad essa e distinto dal centro. Per P si conduca la corda AB perpendicolare ad OP. Dimostrare che ogni altra corda passante per P è maggiore della corda AB.

28 * Sia AB il diametro di una circonferenza e sia CD una corda (che non sia diametro) perpendicolare ad AB. Dimostrare che i triangoli ACD e BCD sono isosceli.

29 * In una circonferenza di centro O, AB e CD sono due corde che s'incontrano nel punto E. Dimostrare che OE è bisettrice dell'angolo formato dalle due corde.

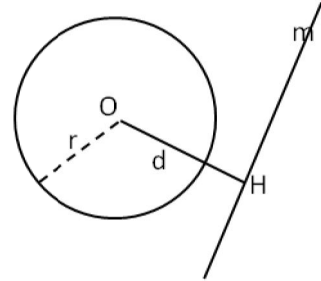
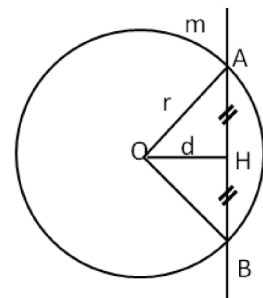
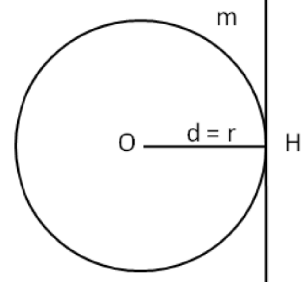
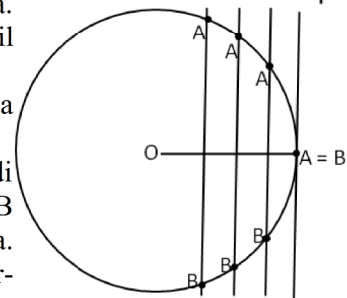
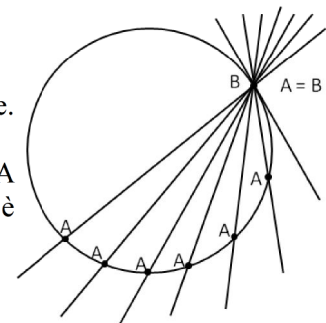
30 * In una circonferenza di centro O, siano date due corde parallele e congruenti. Dimostrare che gli estremi delle corde sono i vertici di un rettangolo.

31 * In una circonferenza di centro O, siano assegnate due corde congruenti AB e CD. I punti M ed N sono i punti medi rispettivamente di AB e CD. si dimostri che OMN è un triangolo isoscele. Inoltre, se la retta MN incontra la circonferenza in E e F, allora si dimostri che $FN \cong EM$ e $FM \cong EN$.

Gli esercizi contrassegnati con * sono tratti da Matematica 2, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pag. 123, licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M2_1112.pdf

►3. Posizioni relative fra rette e circonferenze

Perché alcune strade a scorrimento veloce vengono chiamate "tangenziali"?
Per rispondere a questa domanda dobbiamo definire le posizioni che può assumere una retta rispetto ad una circonferenza.
Consideriamo in uno stesso piano una circonferenza *C* di centro O e raggio r e una retta generica *m;* la distanza *d* fra il centro O e la retta *m* è definita dal segmento OH, che ha un estremo coincidente con il centro O ed è perpendicolare in H alla retta *m* (H è il piede della perpendicolare).

a) d > r la distanza del centro O dalla retta è maggiore del raggio.
Il punto H è esterno alla circonferenza così come ogni altro punto della retta m. La retta si dice allora **esterna** alla circonferenza e non ha alcun punto in comune con essa, ovvero non vi sono punti di intersezione fra *C* ed *m.*

b) d < r la distanza del centro O dalla retta è minore del raggio.
La retta *m* interseca la circonferenza in due punti distinti A e B; questi appartengono alla circonferenza e quindi OA = OB = r. Il segmento AB appartiene alla retta e definisce la corda AB, i cui punti, tutti interni alla circonferenza, hanno una distanza dal centro minore del raggio; il punto di minore distanza è proprio H, che è anche il punto medio della corda AB. I punti della retta non appartenenti alla corda AB sono esterni alla circonferenza e la loro distanza dal centro O è maggiore del raggio.
La retta viene detta **secante** alla circonferenza nei punti A e B, che sono i punti di intersezione della retta con la circonferenza.

c) d = r la distanza del centro O dalla retta è pari al raggio
Il punto H appartiene alla circonferenza mentre ogni altro punto della retta *m* è esterno alla circonferenza e ha una distanza dal centro O maggiore del raggio. La retta viene detta **tangente** alla circonferenza; H è il punto di tangenza o di contatto.

Osservazioni
Si noti che la retta tangente è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza. Inoltre, l'unica retta perpendicolare al raggio nel punto d'intersezione tra il raggio e la circonferenza è tangente.
Consideriamo una circonferenza *C* di centro O e raggio r e una retta *m* ad essa secante nei punti distinti A e B. Sia OH la distanza del centro O dalla retta.
Trasliamo la retta *m* in modo da aumentare la sua distanza dal centro O (vedi figura). All'aumentare della distanza d = OH, la distanza fra i punti A e B diminuisce; quando OH = r , i punti A, B coincidono nel punto di tangenza. Dunque la tangente è un caso particolare di secante avente due punti di intersezione coincidenti.

Una più efficace "visualizzazione" di questo concetto è la seguente.
Consideriamo la stessa circonferenza e la stessa retta dell'esempio precedente. Ruotiamo la retta attorno al punto B (vedi figura).
La distanza del punto A dal punto B diminuisce all'aumentare dell'angolo OBA fra la retta e il raggio. Quando il punto A coincide con il punto B, il raggio è perpendicolare alla retta e la retta è tangente alla circonferenza in $B = A$.

Il lettore dimostri per esercizio il seguente teorema, si suggerisce di ricorrere alla dimostrazione per assurdo.

TEOREMA. **Se una retta è esterna ad una circonferenza, allora la sua distanza dal centro è maggiore del raggio, se è tangente la distanza dal centro è uguale al raggio e se è secante la distanza dal centro è minore del raggio.**

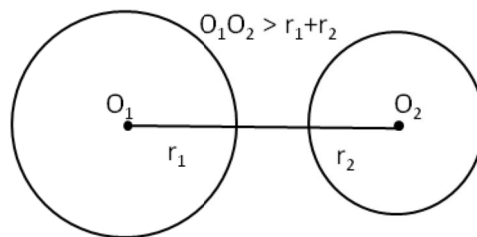
Possiamo ora rispondere al quesito iniziale. Il termine tangenziale viene utilizzato per descrivere una strada a scorrimento veloce, realizzata in zone particolarmente urbanizzate, per permettere il transito degli autoveicoli senza dover entrare in contatto diretto con la circolazione urbana; ciò comporta evidenti benefici per la vivibilità dei centri cittadini. Possiamo immaginare il centro città racchiuso in un cerchio e la tangenziale come una retta di un certo spessore che è tangente al cerchio.

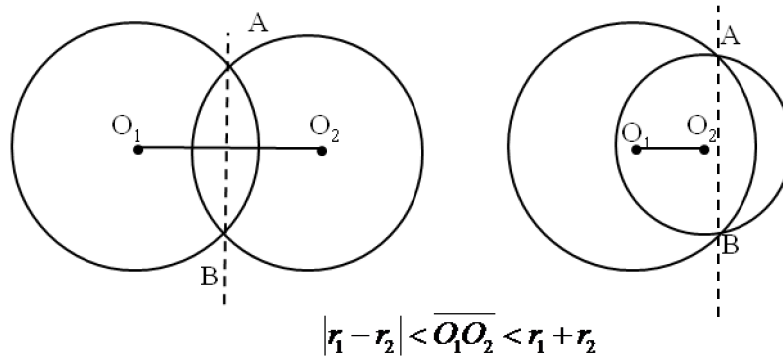
Nella figura la tangenziale di Lecce secondo Google Maps: due punti diametralmente opposti A e B sono collegati mediante una tangenziale evitando il transito nell'agglomerato urbano. Solitamente si tratta di vere e proprie autostrade che presentano anche due uscite verso il centro.

Posizioni reciproche di due circonferenze

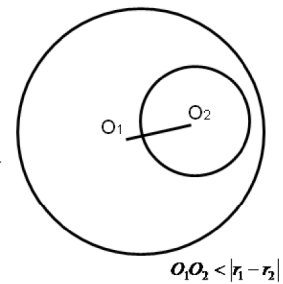
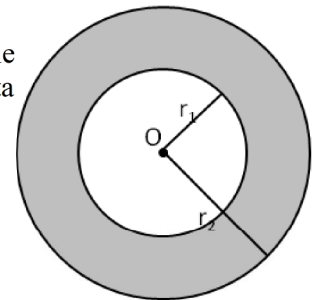
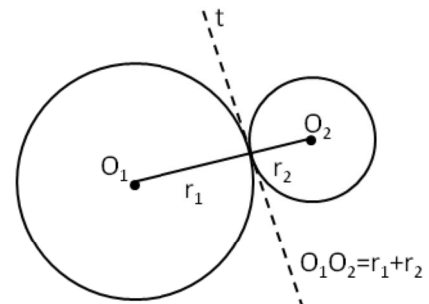
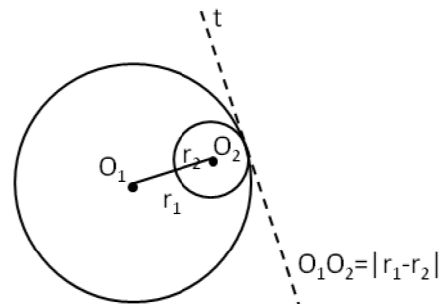
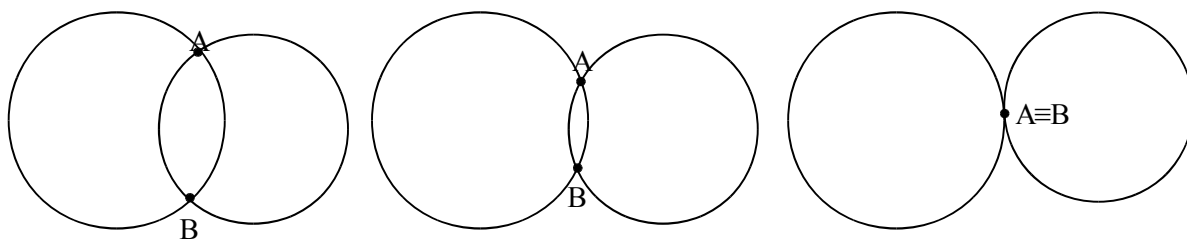
Descriviamo adesso le posizioni reciproche di due circonferenze.
Due circonferenze si dicono:
1. **esterne** se tutti i punti dell'una sono esterni all'altra;
2. **secanti** quando hanno due punti in comune;
3. **una interna all'altra** se i loro raggi sono diseguali e i punti della circonferenza di raggio minore sono tutti interni a quella di raggio maggiore;
4. **tangenti** se hanno un solo punto in comune detto punto di tangenza; si può allora distinguere fra:
   4a. **tangenti esternamente**, se ad eccezione del punto di tangenza, tutti i punti di una circonferenza sono esterni all'altra;
   4b. **tangenti internamente**, se i loro raggi sono diseguali e, ad eccezione del punto di tangenza, tutti i punti della circonferenza di raggio minore sono interni a quella di raggio maggiore.

Analizziamo in dettaglio i diversi casi; come esercizio lasciamo allo studente la dimostrazione rigorosa delle seguenti proprietà.

1. Quando le circonferenze sono esterne la distanza fra i due centri è maggiore della somma dei raggi.

Abbiamo già dimostrato che per tre punti distinti non allineati passa una sola circonferenza, mentre per due punti passano infinite circonferenze. Di conseguenza due circonferenze distinte possono avere al massimo due punti in comune. E' il caso delle circonferenze secanti. Se invece il numero di punti in comune è uno, allora ci riduciamo al caso delle circonferenze tangenti.

2. Quando due circonferenze si intersecano in due punti A e B, la distanza fra i centri è maggiore della differenza dei raggi e minore della loro somma.

La retta passante per i punti di intersezione viene detta **asse radicale**.

Si dimostra che l'asse radicale è perpendicolare alla retta congiungente i centri.

3.Se una circonferenza è interna ad un'altra, e dunque ha raggio minore, la distanza fra i centri è minore della differenza fra i raggi.

Un caso particolare di circonferenze una interna all'altra è rappresentato dalle **circonferenze concentriche**, i cui centri coincidono. La zona di piano delimitata dalle due circonferenze è detta corona circolare.

4a. Quando due circonferenze sono **tangenti esternamente** in un punto T, la distanza fra i centri è uguale alla somma dei raggi. La retta tangente passante per T è comune alle due circonferenze ed è perpendicolare alla retta congiungente i due centri.

4b. Se le circonferenze sono **tangenti internamente**, la distanza fra i centri è pari alla differenza dei raggi.

Anche per le circonferenze si può affermare che sono tangenti in due punti coincidenti; infatti se prendiamo due circonferenze secanti e man mano allontaniamo i loro centri, osserviamo che i due punti di intersezione si avvicinano sempre più fino a sovrapporsi nel momento in cui la distanza fra i loro centri è pari alla somma dei raggi.

Se esaminiamo le varie posizioni reciproche nel caso di due circonferenze congruenti ($r_1 = r_2 = r$), tenendo conto anche del fatto banale che in questo caso $| r_1 - r_2 | = 0$ e $r_1 + r_2 = 2r$, scompaiono le "distinte" possibilità che siano concentriche, interne, tangenti internamente, e compare la possibilità che siano coincidenti, cioè perfettamente sovrapposte.
Lasciamo al lettore la "rivisitazione" dei vari casi nell'ipotesi che le due circonferenze siano congruenti.

►4. Angoli nelle circonferenze

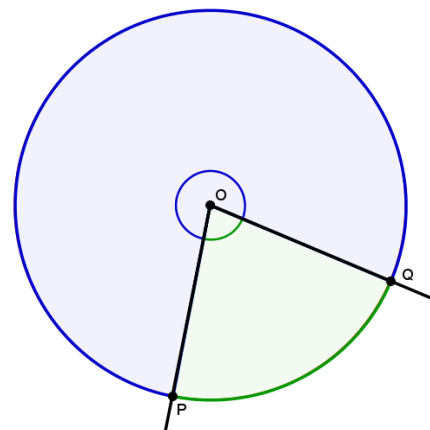
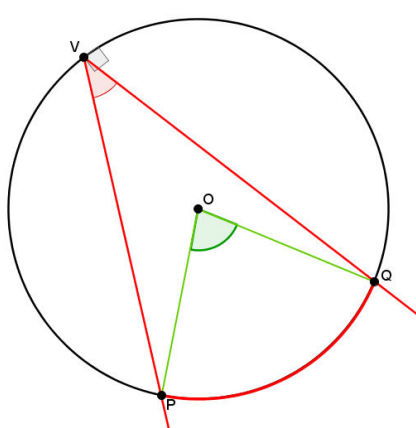
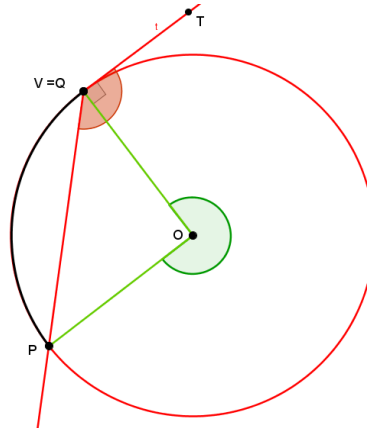
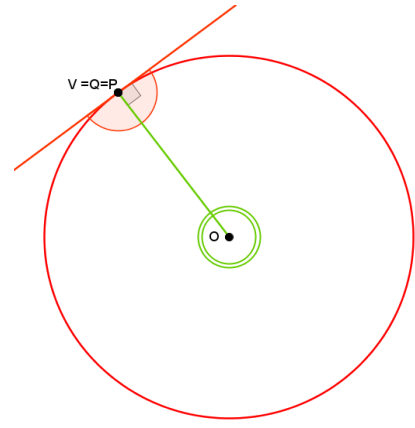
Ricordiamo che abbiamo definito angolo al centro di una circonferenza di centro O e raggio r un qualsiasi angolo avente come vertice il centro O.
Tracciato un angolo al centro, i suoi lati intersecano la circonferenza in due punti P e Q e di conseguenza l'angolo contiene l'arco PQ; si dice che l'angolo al centro POQ insiste sull'arco PQ o sottende l'arco PQ.
Si noti che tracciate due semirette uscenti dal centro O, si vengono a formare due angoli al centro esplementari, ovvero la cui somma è un angolo giro, a cui corrispondono due distinti archi complementari PQ, la cui somma è il perimetro della circonferenza.
I due angoli sono uno convesso e uno concavo, tranne il caso particolare in cui essi sono entrambi piatti, con le due semirette opposte. In tal caso, anche i relativi archi sono congruenti e ognuno ha misura pari al semiperimetro della circonferenza.

Diamo ora la seguente

DEFINIZIONE. Data una circonferenza di centro O e raggio r, si definisce **angolo alla circonferenza** qualsiasi angolo avente il vertice sulla circonferenza e i cui lati siano secanti o tangenti alla circonferenza stessa.

In base alla definizione si possono distinguere tre casi:

- i lati dell'angolo sono entrambi secanti alla circonferenza;
- un lato è secante e l'altro tangente;
- ambedue i lati sono tangenti.

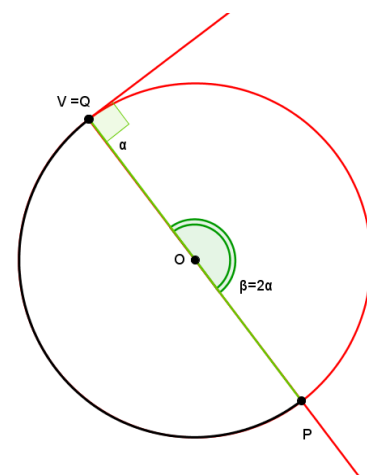
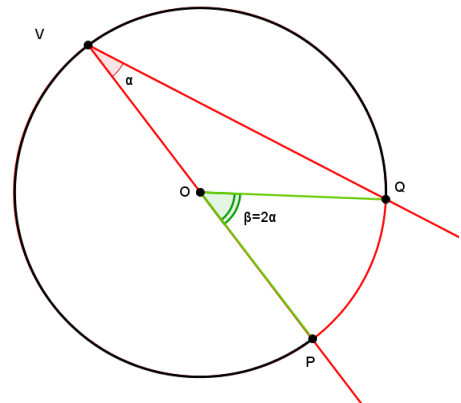
Anche gli angoli alla circonferenza insistono su archi di circonferenza. Questi appartengono all'angolo stesso e sono delimitati dai punti di tangenza o di intersezione fra i lati dell'angolo e la circonferenza. Nella figura seguente gli angoli alla circonferenza e i rispettivi archi sono segnati in rosso. In verde i corrispondenti angoli al centro come segue dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE. Un angolo al centro ed un angolo alla circonferenza si dicono **corrispondenti** se insistono sullo stesso arco.

L'angolo al centro POQ corrisponde all'angolo alla circonferenza PVQ

L'angolo al centro POQ corrisponde all'angolo alla circonferenza PVT

L'angolo giro di vertice O corrisponde all'angolo piatto di vertice V

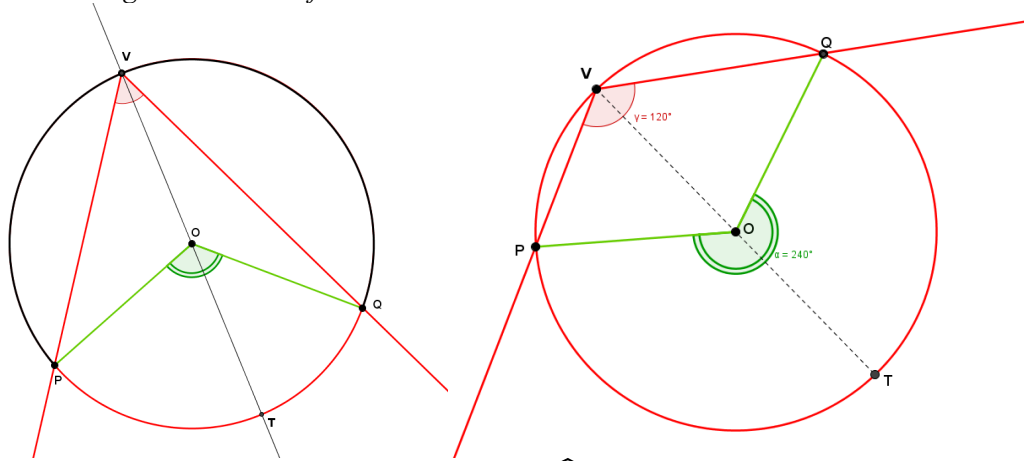
TEOREMA. **L'angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.**

<u>Ipotesi</u>: *α angolo alla circonferenza che insiste sull'arco PQ; β angolo al centro corrispondente.*
<u>Tesi</u>: $\beta = 2\alpha$
<u>Dimostrazione</u>
Distinguiamo tre casi:

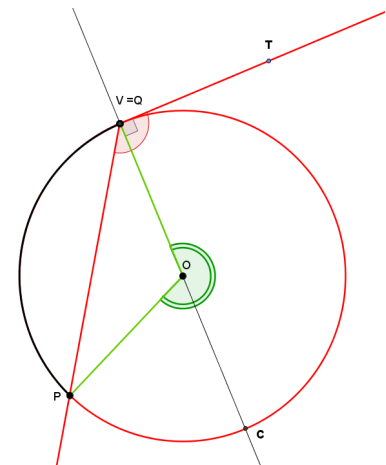
1) Un lato dell'angolo alla circonferenza passa per il centro e dunque si sovrappone al diametro.
Abbiamo due possibilità:

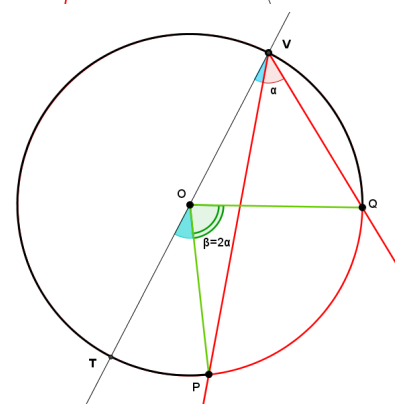
1a) L'altro lato è secante alla circonferenza.
In riferimento alla figura a fianco, il triangolo OVQ è isoscele sulla base VQ, in quanto i lati OV e OQ sono due raggi della circonferenza; ne segue che gli angoli alla base sono congruenti e dunque $O\widehat{Q}V \cong \alpha$. L'angolo al centro $P\widehat{O}Q$ giace sul prolungamento del lato OV e dunque è un angolo esterno al triangolo OVQ. Per il teorema degli angoli esterni ad un triangolo, possiamo affermare che POQ è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti e quindi $\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

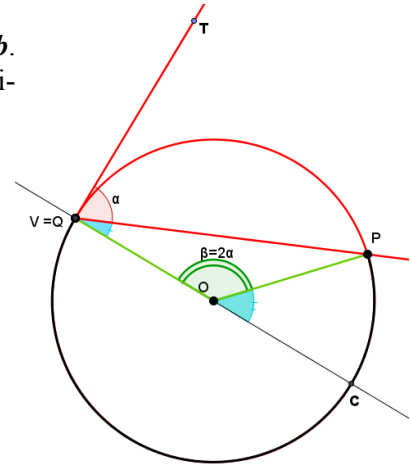
1b) L'altro lato è tangente alla circonferenza.
In questo caso un lato coincide sempre con il diametro e l'altro è tangente alla circonferenza nel punto V = Q; poiché le rette tangenti alla circonferenza sono sempre ortogonali al raggio nel punto di tangenza, i due lati sono perpendicolari. Di conseguenza l'angolo α è un angolo retto e il corrispondente angolo al centro β è un angolo piatto, per cui $\beta = 2\alpha$.

2) Il centro O è interno all'angolo alla circonferenza
Anche in questo caso abbiamo due possibilità:

2a) I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti.

Si conduca dal vertice V dell'angolo alla circonferenza $P\widehat{V}Q$ il diametro VT; si ottengono in tal modo due angoli alla circonferenza $P\widehat{V}T$ e $T\widehat{V}Q$ la cui somma è proprio l'angolo $P\widehat{V}Q$. Tali angoli hanno il lato comune VT coincidente con il diametro e dunque, essendo $P\widehat{O}T$ e $T\widehat{O}Q$ i rispettivi angoli al centro, possiamo applicare ad ognuno di essi il risultato dimostrato al punto 1: $P\widehat{O}T=2P\widehat{V}T$ e $T\widehat{O}Q=2T\widehat{V}Q$.
Ma la somma degli angoli $P\widehat{O}T$ e $T\widehat{O}Q$ è pari all'angolo al centro $P\widehat{O}Q$, corrispondente all'angolo alla circonferenza $P\widehat{V}Q$.
Dunque $P\widehat{O}Q=P\widehat{O}T+T\widehat{O}Q=2P\widehat{V}T+2T\widehat{V}Q=2(P\widehat{V}T+T\widehat{V}Q)=2P\widehat{V}Q$.

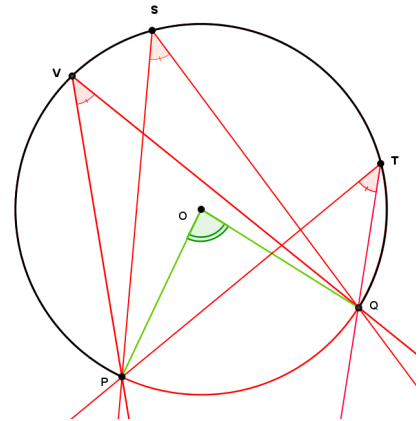
2b) Un lato dell'angolo alla circonferenza è tangente.

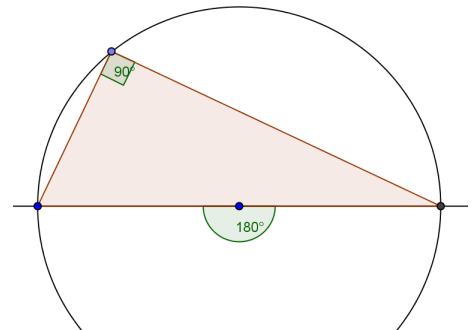
La dimostrazione è del tutto simile alla precedente. Il diametro VC divide l'angolo alla circonferenza $P\widehat{V}T$ negli angoli $P\widehat{V}C$ e $C\widehat{V}T$. Per il primo angolo vale quanto già dimostrato al punto ***1a*** e ribadito al punto precedente: detto $P\widehat{O}C$ il corrispondente angolo al centro, possiamo scrivere $P\widehat{O}C=2P\widehat{V}C$. Inoltre, $C\widehat{V}T$ è retto per costruzione, e difatti misura la metà del corrispondente angolo al centro $C\widehat{O}V$, che è proprio un angolo piatto (vedi quanto dimostrato nel punto 1b). Anche in questo caso, essendo $P\widehat{O}V$ l'angolo al centro corrispondente all'angolo $P\widehat{V}T$, si dimostra che
$P\widehat{O}V=P\widehat{O}C+T\widehat{O}Q=2P\widehat{VC}+2C\widehat{V}T=2(P\widehat{V}C+C\widehat{V}T)=2P\widehat{V}T$.
Si noti che $P\widehat{O}V$ è un angolo concavo, ovvero maggiore di un angolo piatto.

3) Il centro O è esterno all'angolo alla circonferenza
Anche qui abbiamo due casi:

3a) *Entrambi i lati dell'angolo alla circonferenza sono secanti.*
Sia $P\widehat{V}Q$ l'angolo alla circonferenza. Tracciamo il diametro VT. Per quanto dimostrato al punto ***1a***, l'angolo al centro $T\widehat{O}Q$ è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza $T\widehat{V}Q$, e $T\widehat{O}P$ è il doppio dell'angolo $T\widehat{V}P$. Essendo $P\widehat{O}Q$ l'angolo al centro corrispondente all'angolo $P\widehat{V}Q$, possiamo scrivere:
$P\widehat{O}Q=T\widehat{O}Q-T\widehat{O}P=2T\widehat{VQ}-2T\widehat{V}P=2(T\widehat{V}Q-T\widehat{V}P)=2P\widehat{V}Q$

3b) Un lato dell'angolo alla circonferenza è tangente
La dimostrazione è analoga alla precedente e fa uso delle proprietà ***1a*** e ***1b***.
Tracciato il diametro VC ed essendo $P\widehat{O}V$ e $P\widehat{V}T$ gli angoli corrispondenti, possiamo scrivere:

$$P\widehat{O}V=C\widehat{O}V-C\widehat{O}P=2C\widehat{V}T-2C\widehat{V}P=2(C\widehat{V}T-C\widehat{V}P)=2P\widehat{V}T$$

I seguenti corollari sono immediata conseguenza del precedente teorema.

COROLLARIO 1. **Angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco sono congruenti.**

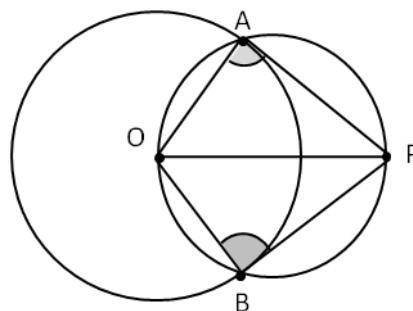
Infatti gli angoli alla circonferenza che nelle figura seguente insistono sull'arco PQ, misurano la metà dello stesso angolo al centro POQ.

COROLLARIO 2. **Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto.**

Infatti il corrispondente angolo al centro è un angolo piatto.

Premesso che affinché due circonferenze siano congruenti è sufficiente che abbiano lo steso raggio, sussistono i seguenti teoremi, di cui lasciamo la dimostrazione al lettore in quanto questa si effettua velocemente ricorrendo alla sovrapposizione tramite movimento rigido degli elementi di cui si vuole dimostrare la congruenza (in una stessa circonferenza questo si otterrà tramite rotazione intorno al centro).

TEOREMI
In una stessa circonferenza o in circonferenze congruenti, ad archi congruenti corrispondono angoli al centro e corde congruenti.
In una stessa circonferenza o in circonferenze congruenti, a corde congruenti corrispondono angoli al centro ed archi congruenti.
In una stessa circonferenza o in circonferenze congruenti, ad angoli al centro congruenti corrispondono archi e corde congruenti

►5. Proprietà dei segmenti di tangenza

Data una circonferenza *C* di centro O e raggio r, ed un punto P del piano, quante sono le rette passanti per P e tangenti a *C*? Ovviamente, dipende dalla posizione del punto P rispetto alla circonferenza *C*. Se P è interno a *C*, non esiste alcuna retta passante per P e tangente a *C*, anche perché OP < r. Se invece il punto $P \in C$, allora esiste una ed una sola retta passante per P e tangente a *C*, come osservato nell'esaminare le posizioni reciproche tra retta e circonferenza, ed in questo caso OP coincide con un raggio di *C* e la retta tangente è perpendicolare ad OP.
Se consideriamo un punto P esterno a *C*, allora esistono due rette distinte passanti per P e tangenti a *C*. Verifichiamo, con l'aiuto di una costruzione geometrica, che da un punto esterno ad una circonferenza possiamo tracciare due tangenti, e due sole, alla circonferenza stessa.

Uniamo P con O e costruiamo la circonferenza di diametro OP; le due circonferenze si intersecano in due punti distinti A, B. Uniamo A e B con O e con P. Gli angoli $O\hat{A}P$ e $O\hat{B}P$ sono retti perché sono angoli alla circonferenza che insistono su semicirconferenze. Dunque $OA \perp AP$ e $OB \perp BP$, per cui le rette AP e BP hanno distanza da O pari ad r, e quindi sono tangenti a *C*. A e B sono gli unici punti per cui valgono le relazioni precedenti, perché sono gli unici punti d'intersezione delle due circonferenze. AP e BP sono pertanto le due uniche rette passanti per P e tangenti a *C*.
I segmenti AP e BP che uniscono i punti di tangenza con il punto esterno P sono detti segmenti tangenti.

TEOREMA. **I segmenti tangenti AP, BP condotti da un punto P ad una circonferenza sono congruenti.**

Infatti, seguendo le linee della costruzione precedente, i triangoli rettangoli OPA e OPB hanno l'ipotenusa OP in comune e i cateti OA, OB congruenti perché raggi della stessa circonferenza; sono dunque congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, e di conseguenza gli altri due cateti AP, BP risultano congruenti, come volevasi dimostrare.

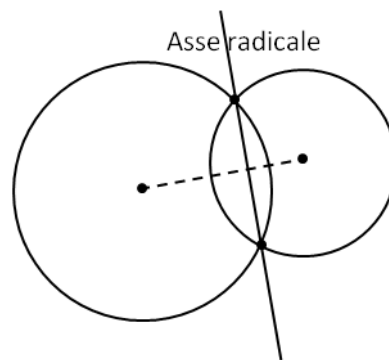
Dalla congruenza dei due triangoli rettangoli segue anche la congruenza delle due coppie di angoli acuti: $A\hat{O}P \cong B\hat{O}P$ e $A\hat{P}O \cong B\hat{P}O$. Da queste due congruenze segue il seguente

COROLLARIO. **Il segmento OP che unisce il centro di una circonferenza con un punto esterno è bisettrice sia dell'angolo formato dalle due tangenti uscenti da P sia dell'angolo al centro avente come lati i raggi per i punti di tangenza.**

Inoltre, OP è anche perpendicolare alla corda AB avente per estremi i punti di tangenza.
Quest'ultima proprietà si può formulare in maniera più semplice, slegandola dai punti di tangenza. Lasciamo al lettore la dimostrazione del seguente

COROLLARIO. **Date due circonferenze secanti, la congiungente dei centri è perpendicolare alla congiungente dei punti d'intersezione.**

Osservazioni

La retta passante per i due punti d'intersezione di due circonferenze è detta **asse radicale**, e si parla di *asse radicale* in maniera più generale, cioè anche tra due circonferenze che tra loro non sono secanti. L'asse radicale esiste quasi sempre: non esiste solo nel caso in cui le due circonferenze siano concentriche.
Nel caso in cui le due circonferenze siano tangenti (sia esternamente sia internamente), l'asse radicale coincide con la tangente in comune.
Nel caso in cui le due circonferenze non abbiano punti in comune (o sono reciprocamente esterne, o sono l'una interna all'altra, ma non concentriche), l'asse radicale è una particolare retta esterna ad entrambe.
L'asse radicale è perpendicolare alla congiungente dei centri ed è ***il luogo geometrico dei punti tali che, mandando da essi le tangenti alle due circonferenze risultano congruenti i quattro segmenti tangenti***.

32 Partendo dai due segmenti consecutivi e congruenti OA e AB costruire le due circonferenze di centro O e raggio rispettivamente OA e OB. Per il punto A si conduca la tangente alla circonferenza di raggio OA. Detti C e D i punti in cui la suddetta tangente incontra la circonferenza di raggio AB, dimostrare che OCBD è un rombo.

33 Su una circonferenza di centro O si consideri un punto C e un diametro AB; sia t la tangente in C alla circonferenza e siano A' e B' le proiezioni su t rispettivamente di A e B. Dimostrare che C è punto medio di A'B' e che CO è congruente alla semisomma di AA' e BB' .

34 Una retta r taglia due circonferenze concentriche C_1 e C_2, siano A e B i punti individuati da r sulla circonferenza C_1 e C e D i punti sulla circonferenza C_2. Dimostra che AC è congruente a BD.

35 Un triangolo isoscele ABC di base BC è inscritto in un cerchio di raggio OC. Prolunga l'altezza BH relativa al lato obliquo AC fino a incontrare la circonferenza in D. Quali triangoli rettangoli si ottengono? Quali angoli della figura sono congruenti all'angolo in D?

36 Dimostrare che le tangenti a una circonferenza condotte dagli estremi di un suo diametro sono parallele tra di loro.

37 Nel triangolo ABC traccia le altezze AH e BK. Dimostra che la circonferenza di diametro AB passa per i punti H e K.

38 Date due circonferenze concentriche dimostrare che la corda staccata dalla circonferenza maggiore su una tangente alla circonferenza minore è dimezzata dal punto di tangenza.

39 Da un punto P esterno a una circonferenza si conducono le due tangenti alla circonferenza, esse incontrano la circonferenza in A e in B. Per un punto Q della circonferenza, diverso da A e da B, e dalla parte di P, si conduce una tangente alla circonferenza, la quale incontra la tangente PA in D e la tangente PB in C. Dimostrare che $A\hat{O}B=2\cdot D\hat{O}C$.

40 Da un punto P esterno a una circonferenza si conducono le tangenti alla circonferenza che risultano tangenti tra di loro, siano A e B i punti di tangenza. Sia B un punto della circonferenza tale che l'angolo in A è retto. Dimostra che AC è la bisettrice dell'angolo BCP.

41 Dagli estremi del diametro AB di una circonferenza si conducono due corde tra loro congruenti, dimostrare che la congiungente gli altri due estremi delle corde passa per il centro della circonferenza.

42 Dimostra che unendo gli estremi di due corde parallele ma non congruenti si ottiene un trapezio isoscele.

43 Sia AB il diametro di una circonferenza, Siano C e D i punti di intersezione di una secante con la circonferenza, C il punto più vicino ad B e D il punto più vicino ad A. Da A e da B si conducono le perpendicolari alla secante che la intersecano rispettivamente in H e in K. Dimostra che DH è congruente a CK.

44 Siano C e C' due circonferenze concentriche, il raggio di C sia doppio del raggio di C'. Da un punto P della circonferenza maggiore condurre le due tangenti all'altra circonferenza. Dimostra che il triangolo formato da P e dai punti di tangenza è un triangolo equilatero.

45 Per un punto P esterno a una circonferenza di centro O traccia le due tangenti alla circonferenza e indica con A e B i due punti di tangenza. Dimsotra che la retta PO è asse di AB. Siano C e D i punti di intersezione della retta OP con la circonferenza. Dimostra che i triangoli ABC e ADB sono isosceli. Conduci per O il diamtero parallelo alla corda AB, il prolungamento del diametro incontra le tangenti PA e PB rispettivamente in E e in F. Dimostra che PC è asse di EF. E che EA è congruente a BF.

46* Sia C una circonferenza di centro O e diametro AB. Dagli estremi A e B si conducano le corde parallele AC e BD. Dimostrare che $AC \cong BD$ e che la corda CD è un diametro.

47* Si disegnino i diametri AB e CD di una circonferenza di centro O, quindi la corda AE perpendicolare a CD e si congiunga E con B. Dimostrare che EB // CD.

48* In una circonferenza di centro O, siano date due corde AB e CD congruenti e incidenti in E in modo tale che $AE \cong CE$. Si dimostri che gli estremi delle corde sono i vertici di un trapezio isoscele.

49* Si considerino i due angoli al centro congruenti $A\hat{O}D$ e $A\hat{O}C$ di una circonferenza di centro O e diametro AB. Si dimostri che BC è congruente a BD.

50* In una circonferenza di centro O, il diametro AB è bisettrice dell'angolo formato dalle corde AD e AC. Dimostrare che $AC \cong AD$.

51* Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC. Si dimostri che la mediana dell'ipotenusa divide il triangolo ABC in due triangoli isosceli. Quando uno dei due triangoli è equilatero?

52* Siano date una circonferenza di centro O e due archi congruenti AB e CD. Condotte le tangenti alla circonferenza t in A e t' in C, siano H e K rispettivamente le proiezioni dei punti B su t e C su t'. Dimostrare che $BH \cong CK$.

53* Sia AB una corda di una circonferenza. Condotte le tangenti alla circonferenza in A e in B, sia C il loro punto d'intersezione. Si dimostri che il triangolo CAB è isoscele.

54 * Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Condotta la mediana dell'ipotenusa AM, si dimostri che $A\hat{M}C \cong 2A\hat{B}C$.

55 * Considerato il triangolo ABC inscritto nella circonferenza C , si conduca l'asse del segmento AB che interseca l'arco non contenente C in D. Si dimostri che CD è bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$.

56 * Si dimostri che, in una circonferenza, ogni diametro è asse di simmetria della circonferenza.

57 * Dimostrare che, in una circonferenza, che l'asse di una corda è anche asse degli archi relativi a quella corda.

58 * Sia C una circonferenza e sia AB un suo arco. Indicato con M il punto medio dell'arco AB, provare che la tangente alla circonferenza in M e l'asse dell'arco sono perpendicolari.

59 * Dopo aver disegnato una circonferenza di centro O, si consideri un suo arco AB. Si disegnino, quindi, due angoli alla circonferenza ordinari che sottendono l'arco dAB e le rispettive bisettrici. Dimostrare che tali bisettrici s'intersecano nel punto medio dell'arco dAB.

60 * Sia data una circonferenza di centro O. Da un punto esterno P tale che PO sia congruente al diametro si conducano le tangenti alla circonferenza PA e PB, con A e B punti di tangenza. Siano M ed N rispettivamente i punti medi di PA e PB; si dimostri che i triangoli ABM e ABN sono congruenti.

61 * Dagli estremi del diametro AB di una circonferenza di centro O si conducano le rette tangenti t, in A, e t', in B. Da un punto P su AB si conduca l'ulteriore retta tangente t" alla circonferenza che interseca le due precedenti rispettivamente in R ed S. Dimostrare che il triangolo ROS è rettangolo in O.

62 * Disegna un triangolo ABC, rettangolo in A, circoscritto ad una circonferenza di centro O e diametro DE. Dimostra che $DE \cong (AB+AC)-BC$

63 * Da un punto esterno P di una circonferenza di centro O si conducano le rette tangenti alla circonferenza nei punti A e B. Dimostrare che il punto medio di PO è il circocentro del triangolo ABP.

64 * Sia data una circonferenza di centro O e siano A e B due punti esterni tali che $AO \cong BO$. Si traccino i segmenti di tangenti AC e AD da A, BE e BF da B. Si dimostri che $AC \cong BE$ e $CD \cong EF$.

65 * Due circonferenze di centri O e O' sono secanti in A e B. Dimostrare che OO' è perpendicolare alla corda comune AB.

66 * Siano *C* e *C'* due circonferenze concentriche di centro O, la seconda di raggio minore rispetto alla prima. Dal punto P della circonfereza *C* conduci le rette tangenti a *C'*, le quali intersecano *C'* (punti di tangenza) in D e E, mentre intersecano *C* negli ulteriori punti B ed C. Dimostrare che: a) il quadrilatero di estremi BCDE è un trapezio isoscele; b) i triangoli ABC e AED hanno gli angoli ordinatamente congruenti.

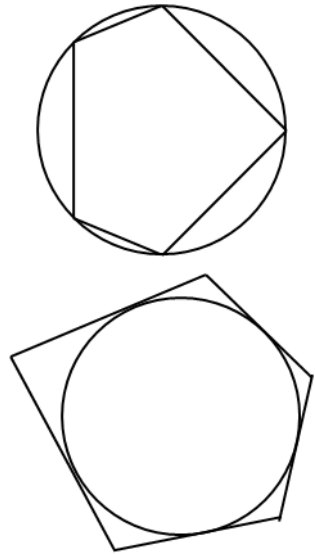
67 * Disegnare una circonferenza di centro O ed una sua corda AB. Sulla tangente per A si consideri un punto C tale che $AC \cong AB$, e la retta CB interseca la circonferenza nell'ulteriore punto D. Si dimostri che: a) il triangolo ADC è isoscele; b) $C\hat{D}A \cong 2D\hat{A}O$.

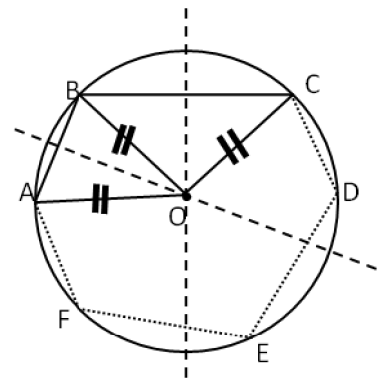
68 * Siano C una circonferenza di centro O e t e t' due rette ad essa tangenti che si intersecano nel punto P. Si disegni una terza retta tangente r che interseca t' in A, quindi una quarta tangente s che intersechi r in B e t in C. Dimostrare che nel quadrilatero di estremi ABCP vale la relazione $PA+BC \cong AB+PC$.

Gli esercizi contrassegnati con * sono tratti da Matematica 2, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pag. 133, 138, licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M2_1112.pdf

►6. Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza

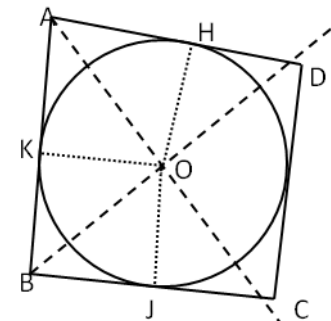
DEFINIZIONE. Un poligono si dice **inscritto** in una circonferenza se tutti i vertici del poligono appartengono alla circonferenza.

TEOREMA. **Se un poligono ha gli assi dei lati che passano per uno stesso punto allora il poligono può essere inscritto in una circonferenza, e viceversa se un poligono è inscritto in una circonferenza allora gli assi dei suoi lati si incontrano nel centro della circonferenza.**

<u>*Dimostrazione a*</u>

Sia ABCDEF un poligono che ha gli assi dei suoi lati che passano per uno stesso punto O. Poiché O appartiene all'asse di AB e poiché l'asse è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi si ha che $AO \cong OB$. Poiché O appartiene anche all'asse di BC allora O è equidistante dagli estremi di BC, cioè $BO \cong OC$. Poiché ciò vale per tutti i lati del poligono si ha: $OA \cong OB \cong OC \cong OD \cong OE \cong OF$. Pertanto la circonferenza di centro O e raggio OA passa per tutti i vertici del poligono e il poligono risulta inscritto.

<u>*Dimostrazione b*</u>
Sia ABCDEF un poligono inscritto in una circonferenza e che ha quindi tutti i vertici sulla circonferenza, allora tutti i suoi lati sono corde della circonferenza, di conseguenza, per una proprietà delle corde, gli assi delle corde passano per il centro della circonferenza, e quindi tutti gli assi dei lati del poligono si incontrano nel centro della circonferenza.

TEOREMA. **Se un poligono convesso ha le bisettrici degli angoli che passano tutte per uno stesso punto allora il poligono può essere circoscritto a una circonferenza, e viceversa se il poligono è circoscritto a una circonferenza allora tutte le bisettrici degli angoli del poligono passano per il centro della circonferenza.**

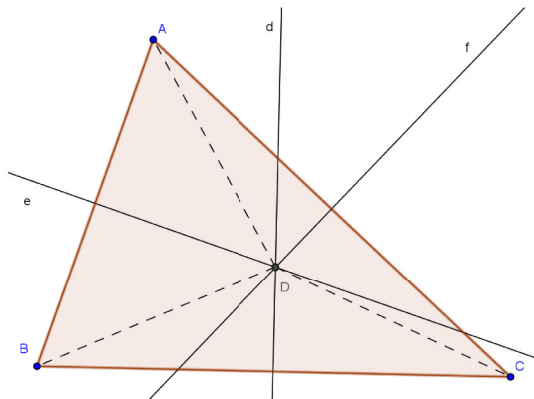
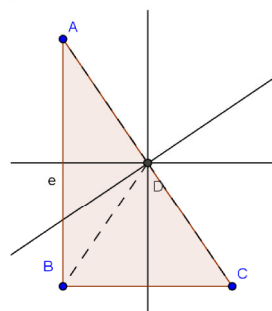
Dimostrazione
ABCD sia il poligono convesso; AO la bisettrice dell'angolo in A e BO la bisettrice dell'angolo in B. Poiché la bisettrice è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo si ha che il punto O è equidistante dal lato AD e dal lato AB, cioè $OH \cong OK$. Analogamente, O, appartenendo alla bisettrice BO dell'angolo in B, è equidistante da AB e da BC, cioè $OJ \cong OK$. Ciò vale per tutti i lati del poligono, pertanto $OH \cong OK \cong OJ \cong \ldots$. Tracciando la circonferenza di centro O e raggio OH si ha la circonferenza inscritta al poligono.
La dimostrazione del teorema inverso si basa anch'essa sulla proprietà della bisettrice dell'angolo.

A
H
D
K
O
B
J
C

►7. Punti notevoli di un triangolo

Circocentro

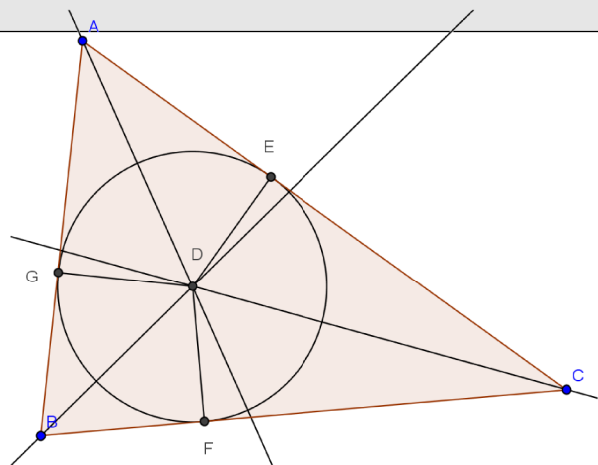
I vertici di un triangolo sono tre punti non allineati, dunque per essi passa una ed una sola circonferenza: il centro di tale circonferenza si trova come intersezione degli assi di due lati del triangolo. Il centro della circonferenza circoscritta al triangolo è appunto detto **circocentro** del triangolo.

TEOREMA. **I tre assi dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, detto circocentro.**

Dimostrazione
Sia ABC un triangolo e siano *e* l'asse di AB, *d* l'asse di BC, *f* l'asse di AC. Sia D il punto d'intersezione tra *d* ed *e* (che, come detto in precedenza, esiste perché le due rette, in quanto perpendicolari a due segmenti non paralleli, non possono essere parallele). Allora risulta $AB \cong BD$ in quanto D∈*e*, ed anche $BC \cong CD$ in quanto P∈*d*; dunque, per la proprietà transitiva della congruenza, risulta $AD \cong CD$, e quindi P∈*f*. Pertanto D risulta equidistante dai tre vertici ed è quindi il centro della circonferenza circoscritta■

Osservazione.
Il circocentro di un triangolo può essere interno o esterno al triangolo o sul perimetro. Ricordando le proprietà degli angoli alla circonferenza, il circocentro è sul perimetro solo nel caso in cui il triangolo è rettangolo, ed in tal caso si trova sul punto medio dell'ipotenusa.
Da ciò seguono le seguenti importanti proprietà:
In un triangolo rettangolo, il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici;
In un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.
Sempre per le proprietà degli angoli alla circonferenza, il circocentro di un triangolo è interno al triangolo se il triangolo è acutangolo, mentre è esterno se il triangolo è ottusangolo (il corrispondente angolo al centro è rispettivamente convesso o concavo).

Incentro

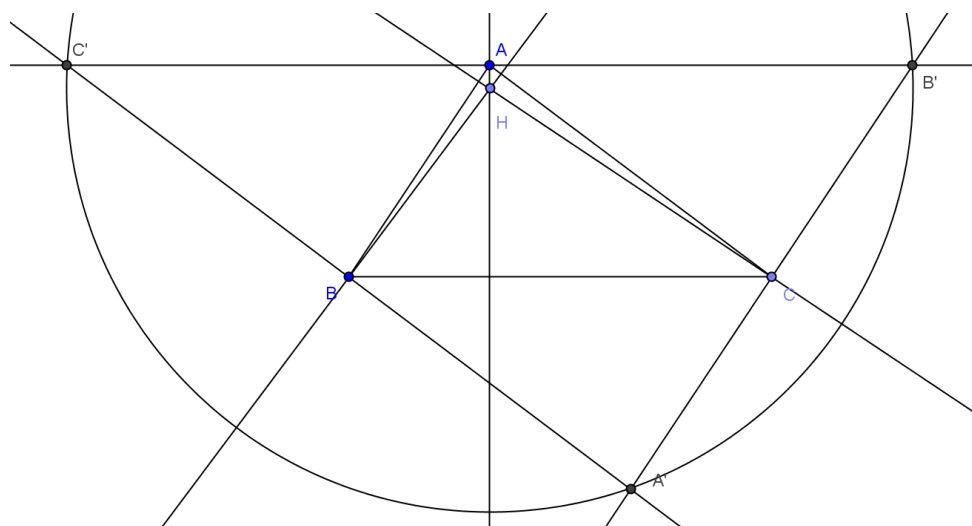
Esiste uno ed un solo punto equidistante dai tre lati di un triangolo, pertanto un triangolo è sempre circoscrivibile ad una circonferenza, cioè esiste ed è unica la circonferenza inscritta in un triangolo.

TEOREMA. **Le bisettrici dei tre angoli di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, detto incentro.**

Dimostrazione. Ricordiamo che la bisettrice è la semiretta che divide a metà l'angolo, essa è anche il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo. Consideriamo un triangolo ABC ed i suoi tre angoli interni. Poiché la somma dei angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, abbiamo $\widehat{A}+\widehat{B}<\pi$ e a maggior ragione $\frac{1}{2}\widehat{A}+\frac{1}{2}\widehat{B}<\pi$, quindi poiché i lati AC e BC non sono paralleli a maggior ragione non possono essere parallele le bisettrici degli angoli interni di vertici A e B, anzi i segmenti di bisettrice sono certamente interni al triangolo. Detto D il punto d'intersezione delle bisettrici di $\widehat{A}$ e di $\widehat{B}$, verifichiamo che anche la bisettrice di $\widehat{C}$ passa per D. Poiché D appartiene alla bisettrice di $\widehat{A}$, è equidistante dai lati AB e AC (GD=DE); analogamente, poiché D appartiene alla bisettrice di $\widehat{B}$, è equidistante dai lati AB e BC (GD=DF). Dunque Q deve essere equidistante dai lati AC e BC, pertanto, D deve appartenere alla bisettrice di $\widehat{C}$. La distanza comune di D dai tre lati è il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo, che ha centro D.

Ortocentro

Un altro punto notevole di un triangolo è il punto d'incontro delle altezze, detto **ortocentro**. Anche questo esiste ed è unico. Ricordiamo che di solito si parla di altezza come del segmento che unisce un vertice con il piede della perpendicolare al lato opposto. Qui ci occupiamo di retta dell'altezza, cioè della retta perpendicolare ad un lato di un triangolo e passante per il vertice opposto. Osserviamo infatti che, mentre l'incentro è certamente interno al triangolo, l'ortocentro può essere esterno al triangolo.

TEOREMA. **Le tre altezze di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, detto ortocentro.**

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo. Tracciamo la retta parallela a BC e passante per A; analogamente tracciamo la parallela ad AC passante per B e la parallela ad AB passante per C. Le tre rette, essendo parallele ai tre lati del triangolo ABC, sono a due a due incidenti. Chiamiamo A' il punto d'intersezione tra AB ed AC, B' il punto d'intersezione tra AB e BC, C' il punto d'intersezione tra AC e BC.

Il triangolo BCA' risulta congruente al triangolo ABC per il secondo criterio, in quanto ha BC in comune, $A\widehat{C}B \cong C\widehat{B}A$ e $A\widehat{B}C \cong B\widehat{C}A$ perché angoli alterni interni tra coppie di rette parallele tagliate dalla trasversale BC. Analogamente anche i triangoli ABC' e ACB' risultano congruenti ad ABC per il secondo criterio, quindi i quattro triangoli sono tutti congruenti. In particolare risulta che i segmenti C'A, AB' e BC sono paralleli e congruenti, dunque la retta passante per A e perpendicolare a BC è sia l'altezza del triangolo ABC relativa al lato BC sia l'asse del segmento C'B'. Analogamente per le altre due altezze. Dunque le tre altezze del triangolo ABC coincidono con gli assi dei lati del triangolo A'B'C': quindi l'ortocentro di ABC esiste perché coincide con il circocentro di A'B'C'.

Osservazione

Dalla costruzione precedente, risulta $B\widehat{A}C \cong B\widehat{A'}C$, $A\widehat{B}C \cong A\widehat{B'}C$, $A\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}B$, pertanto ABC è acutangolo, rettangolo, ottusangolo come A'B'C'. Possiamo affermare dunque che:

- se ABC è rettangolo, lo è pure A'B'C', ed il punto medio dell'ipotenusa di A'B'C' coincide con il vertice dell'angolo retto di ABC;
- se ABC è ottusangolo, il suo circocentro è esterno ad esso, quindi l'ortocentro di ABC, dovendo essere esterno al triangolo A'B'C', è a maggior ragione esterno ad ABC;
- se ABC è acutangolo, quanto detto in precedenza ci permette solo di affermare che il circocentro di A'B'C', che è anche l'ortocentro di ABC, è interno ad A'B'C', ma in realtà è interno anche ad ABC.

Questo si vede meglio se consideriamo il classico modo di disegnare l'altezza: facciamo eventualmente compiere al triangolo una rototraslazione in modo che il lato rispetto a cui vogliamo tracciare l'altezza sia "orizzontale" ed il vertice opposto si trovi nel "semipiano in alto"; se il triangolo è acutangolo, comunque scegliamo il lato rispetto a cui vogliamo tracciare l'altezza, gli angoli compresi sono entrambi acuti, per cui il piede dell'altezza deve essere necessariamente interno al lato, e pertanto l'intera altezza (segmento) deve essere interna al triangolo. Come nel caso dell'incentro, che è sempre interno al triangolo, anche l'ortocentro è interno nel caso di triangolo ottusangolo. Lasciamo al lettore la dimostrazione dettagliata di queste due affermazioni (si può procedere per assurdo), ed illustriamo quanto detto nella figura seguente.
In riferimento alla figura del teorema precedente, l'ortocentro del triangolo ABC, e quindi anche il circocentro del triangolo A'B'C', non può cadere all'interno di uno dei triangoli ABC', AB'C, A'BC.

Baricentro

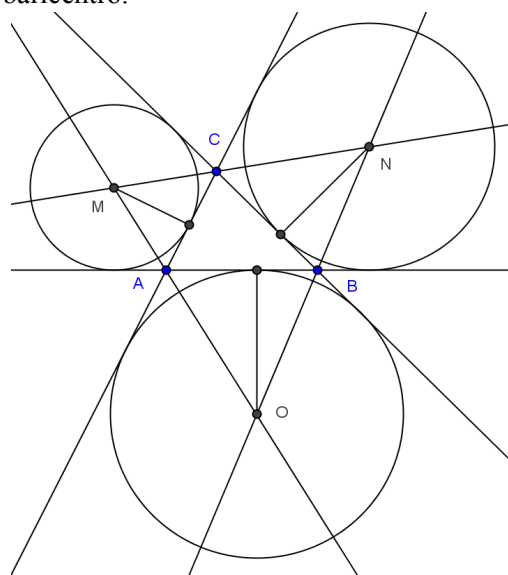
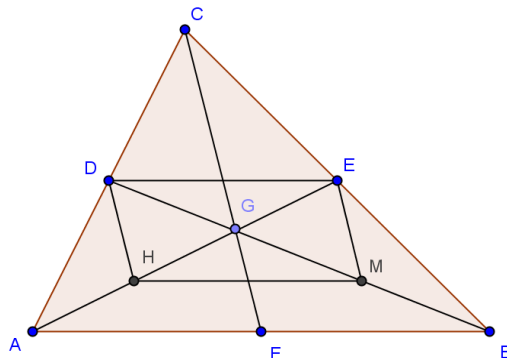
Si chiama baricentro di un triangolo il punto d'incontro delle tre mediane. Poiché le mediane sono segmenti interni ad un triangolo, anche il baricentro lo è (segue banalmente dal teorema seguente che, oltre a dirci che il baricentro esiste ed è unico, ci dà anche un modo "operativo" per individuarlo).

TEOREMA DEL BARICENTRO. **Le tre mediane di un triangolo si incontrano in un punto, detto baricentro, che divide ciascuna di esse in due parti tali che una (quella che contiene il vertice) è doppia dell'altra.**

<u>*Dimostrazione*</u>

Si tratta di una delle principali conseguenze della corrispondenza di Talete, segue in particolare dal corollario riguardante i segmenti che uniscono i punti medi dei lati di un triangolo e dalle proprietà dei parallelogrammi.
Dimostriamo prima che la tesi è verificata per il punto d'intersezione di due mediane, e poi dimostriamo che la terza mediana passa per quel punto.
Sia ABC un triangolo. Detti D, E, F i punti medi rispettivamente dei lati AC, BC, AB, tracciamo le mediane AE e BD. Queste, essendo interne al triangolo, certamente si incontreranno in un punto che chiamiamo G. Chiamiamo inoltre H il punto medio del segmento AG ed M il punto medio di BG. Uniamo D con E ed H con M. Nel triangolo ABC, DE è il segmento che unisce i punti medi dei lati AC e CB, dunque è parallelo al terzo lato AB ed è congruente alla sua metà. Ma nel triangolo ABG la stessa cosa vale per HM: è il segmento che unisce i punti medi dei lati AG e GB, per cui risulta parallelo al terzo lato AB e congruente alla sua metà. Pertanto i segmenti DE ed HM sono tra loro paralleli e congruenti. Questo ci consente di affermare che il quadrilatero HMED è un parallelogramma. Inoltre, per le proprietà dei parallelogrammi, le diagonali DM ed EH si dividono scambievolmente per metà, cioè il punto G è il punto medio sia di DM sia di EH. Dunque $GH \cong GE$ e $GD \cong GM$. Ma, per come abbiamo preso i punti H ed M, risulta anche $GH \cong HA$ e $GM \cong MB$. Pertanto sono congruenti i segmenti AH, HG, GE (ognuno pari ad un terzo della mediana AE) ed anche tra loro congruenti i segmenti BM, MG, GD (ognuno pari ad un terzo della mediana BD). È dunque vero che BG misura il doppio di GD, come pure AG misura il doppio di GE.
Abbiamo dunque dimostrato che l'intersezione di due mediane è un punto interno al triangolo tale che divide ciascuna delle due mediane in parti che sono l'una il doppio dell'altra (quella che contiene il vertice è doppia dell'altra).
A questo punto, se il ragionamento fatto per le mediane AE e BD si ripete ad esempio per AE e CF, si può affermare che CF incontra AE in un punto tale che divide ciascuna delle due in due parti tali che quella che contiene il vertice è doppia dell'altra; ma tale punto su AE è già stato individuato: è il punto G. Quindi possiamo affermare che anche CF passa per il punto G ed inoltre il segmento CG è congruente al doppio del segmento GF. Questo conclude la dimostrazione del teorema del baricentro.

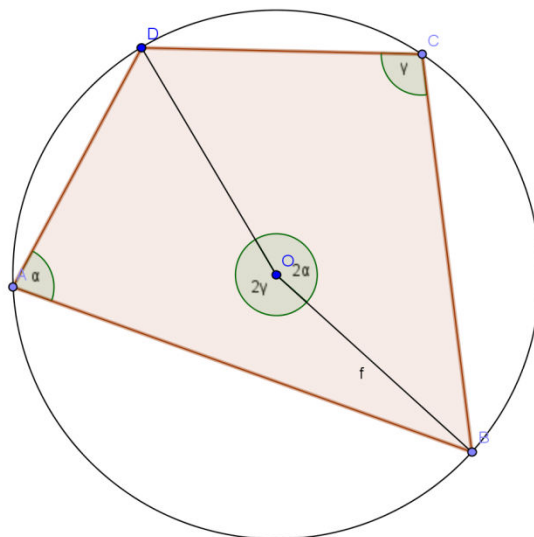
Excentri

Oltre ai principali punti notevoli di un triangolo esistono altri tre punti particolari, detti excentri, che sono i punti d'intersezione delle bisettrici degli angoli esterni. Illustriamo quanto affermato con una figura: i punti M, N, O sono gli excentri del triangolo ABC. Ricordando che la bisettrice è il luogo dei punti equidistanti dai lati di un angolo, notiamo ad esempio che il punto N, essendo l'intersezione delle bisettrici degli angoli esterni in B e C, è equidistante da BC e dai prolungamenti dei lati AC e AB: dunque è equidistante dalle rette dei tre lati del triangolo ABC. Se chiamiamo r la distanza di N da ciascuna delle rette dei tre lati di ABC, esiste una ed una sola circonferenza con centro N che ha come tangenti le rette dei tre lati, e tale circonferenza ha raggio r. Analogo discorso si può fare per gli altri due excentri, M ed O.

►8. Proprietà dei quadrilateri inscritti e circoscritti

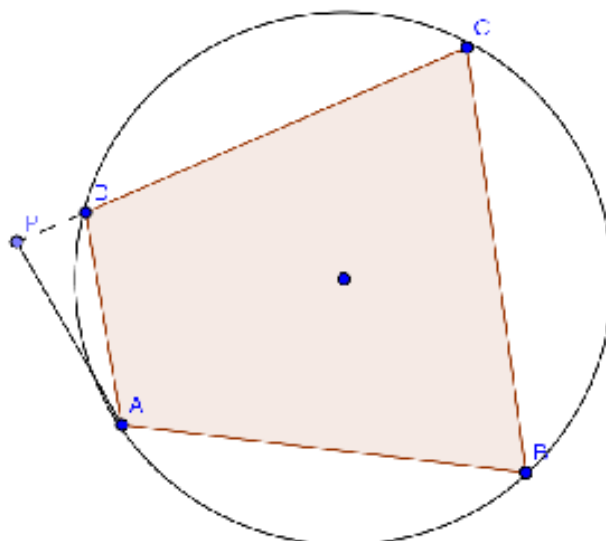
Per i quadrilateri, la proprietà di essere inscritto o circoscritto comporta notevoli proprietà.

TEOREMA. **Se un quadrilatero è inscritto ad una circonferenza, allora la somma di due angoli opposti è uguale alla somma degli altri due, ovvero un angolo piatto.**

Dimostrazione

Aiutiamoci con il disegno a fianco. Consideriamo il quadrilatero ABCD inscritto nella circonferenza di centro O. Dimostriamo che la somma degli angoli in A e in C è un angolo piatto. Per fare questo, tracciamo gli angoli al centro insistenti sui due archi delimitati da D e B: i rispettivi angoli alla circonferenza saranno A e C. se chiamiamo α l'angolo in A, il relativo angolo al centro varrà 2α, per il teorema che lega angolo al centro e angolo alla circonferenza. Ripetiamo lo stesso procedimento per l'angolo in C, che chiamiamo γ : il relativo angolo al centro varrà 2γ. La somma degli angoli 2α e 2γ, ovvero l'angolo $2(\alpha+\gamma)$, forma un angolo giro, dunque la sua metà $\alpha+\gamma$ è un angolo piatto. Ma α è proprio l'angolo in A, e γ è quello in C. La loro somma, come volevamo dimostrare, dà un angolo piatto. Dato che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è data da un angolo giro, sottraendo l'ampiezza degli angoli in A e in C, che insieme danno un angolo piatto, ottengo l'ampiezza della somma degli angoli in B e D, dunque, anche per questi ultimi due angoli, la somma è un angolo piatto.

Si può dimostrare che vale anche il teorema inverso: *se, in un quadrilatero, la somma degli angoli opposti è uguale a un angolo piatto, allora quel quadrilatero è inscrivibile ad una circonferenza.*
Possiamo dunque enunciare il teorema completo.

TEOREMA INVERSO. **Se un quadrilatero ha gli angoli opposti supplementari, allora il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza.**

Si dimostra per assurdo, cioè negando la tesi.
Supponiamo che la circonferenza passi per ABC ma intersechi il quadrilatero in un punto P diverso da D. ABCP è quindi un quadrilatero inscritto in una circonferenza, e per il teorema diretto gli angoli opposti dovranno essere supplementari: $\widehat{A}+\widehat{C}=\pi$, $\widehat{B}+\widehat{P}=\pi$. Ma per ipotesi è anche $\widehat{B}+C\widehat{D}A=\pi$, e quindi gli angoli $C\widehat{D}A$ e $C\widehat{P}A$ devono essere congruenti in quanto supplementari dello stesso angolo $\widehat{B}$. Questo però è assurdo, in quanto avremmo che $C\widehat{D}A$, angolo esterno del triangolo ADP, sarebbe congruente ad un angolo interno non adiacente ad esso, mentre per il primo teorema dell'angolo esterno deve essere sempre maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti ad esso. Dunque anche il punto D appartiene alla circonferenza.

Vediamo ora alcune proprietà dei quadrilateri circoscritti

TEOREMA. **Se un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza, allora la somma delle lunghezze di due suoi lati opposti è uguale alla somma delle lunghezze degli altri due.**

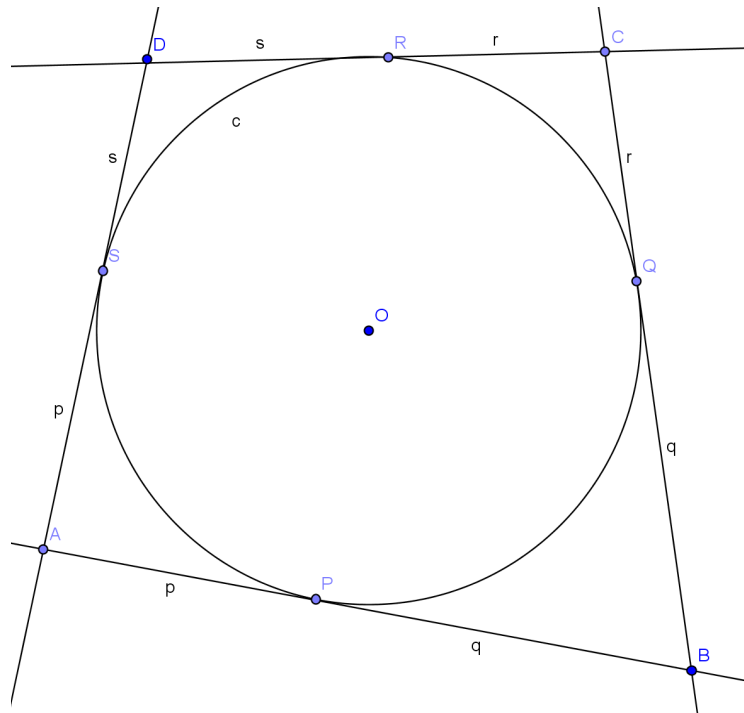
Dimostrazione

Sia il quadrilatero ABCD circoscritto alla circonferenza di centro O, come in figura. Siano P, Q, R, S i punti di tangenza rispettivamente dei lati AB, BC, CD, AD. Per il teorema sull'uguaglianza dei segmenti di tangente ad una circonferenza condotti da un punto esterno, si ha $AP \cong PS$, $BP \cong BQ$, $CQ \cong CR$, $DR \cong DS$, . Chiamando AP=p, BQ=q, CR=r, DS=s (vedi figura) si ha che:

AB+CD = AP+PB+CR+RD = p+q+r+s,

e che:

BC+AD = BQ+QC+DS+AS = p+q+r+s.

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, ho che AB+CD=AD+BC, che è proprio quanto volevamo dimostrare.

TEOREMA INVERSO. **Se in un quadrilatero la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due, allora il quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza.**

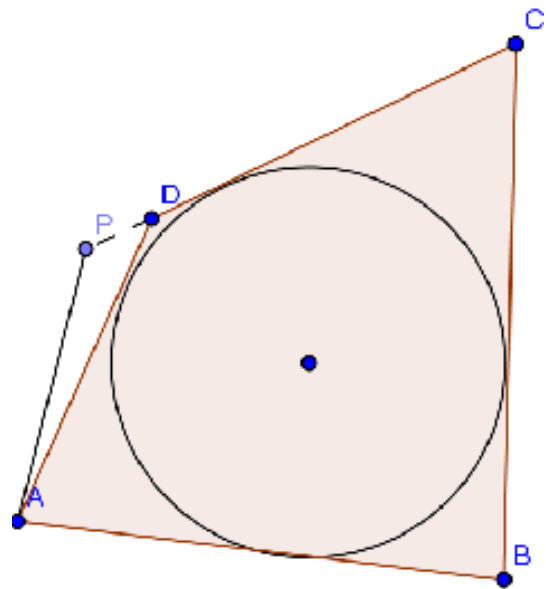
Anche questo teorema i dimostra per assurdo.

Supponiamo che il quadrilatero non sia circoscrivibile.

Sia ABCD il quadrilatero; tracciamo una circonferenza che sia tangente ai lati AB, BC e CD; questa esiste sicuramente poiché , se prolungassimo i lati AB (dalla parte di A) e CD (dalla parte di D), si formerebbe un triangolo, e in un triangolo è sempre possibile inscrivere una circonferenza. Supponiamo che la tangente condotta da A alla circonferenza intersechi la retta CD in un punto P diverso da D, che si trovi sul prolungamento del lato CD. Allora CP=CD+DP. Poichè ACBP è un quadrilatero circoscritto, possiamo applicare il teorema diretto: AP+BC=AB+CD+DP.

Per ipotesi abbiamo: AB+CD=AD+BC; sostituiamo nella relazione precedente AD+BC al posto di AB+CD; otteniamo: AP+BC=AD+BC+DP

Sottraendo ad ambo i membri BC si ottiene: AP=AD+DP.

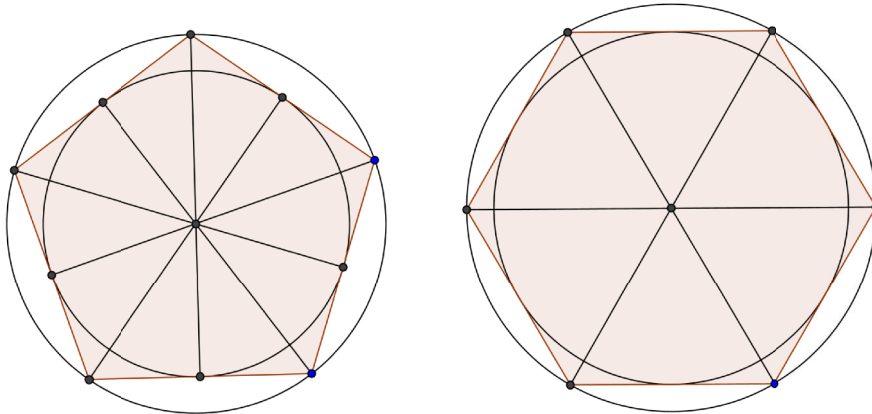
Siamo giunti all'assurdo, in quanto avremmo che nel triangolo ADP un lato è uguale alla somma degli altri due, mentre deve essere sempre minore. Quindi la tesi è vera.

69 Quali dei seguenti gruppi di angoli possono essere angoli interni di un quadrilatero inscritto in una circonferenza?

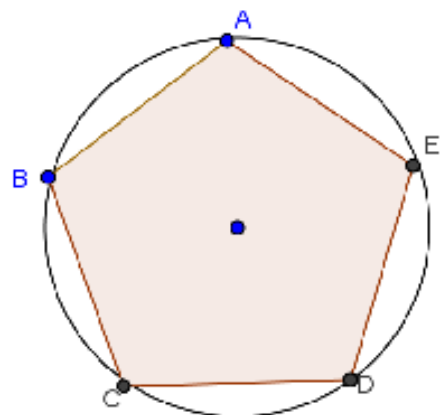
a) $\alpha=80°$	$\beta=60°$	$\gamma=100°$	$\delta=120°$
b) $\alpha=45°$	$\beta=30°$	$\gamma=45°$	$\delta=60°$
c) $\alpha=185°$	$\beta=90°$	$\gamma=90°$	$\delta=15°$
d) $\alpha=110°$	$\beta=120°$	$\gamma=70°$	$\delta=60°$

70 Quali dei seguenti gruppi di angoli possono essere angoli interni di un quadrilatero inscritto in una circonferenza?

a) a=80cm	b=60cm	c=1000cm	d=120cm
b) a=4,5cm	b=3cm	c=4,5cm	d=3cm
c) a=18,5m	b=90cm	c=0,5m	d=100cm
d) a=110cm	b=120cm	c=130cm	d=120cm

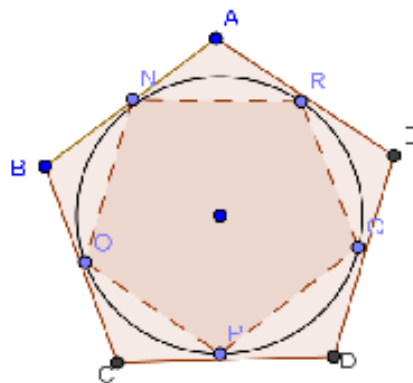
►9. Poligoni regolari

I poligoni regolari, cioè quelli che hanno tutti i lati e tutti gli angoli interni congruenti, sono sia inscrivibili sia circoscrivibili, e la circonferenza circoscritta e quella inscritta sono concentriche.
Il centro comune alle due circonferenze si dice anche **centro della figura**.
Nel caso di poligoni con un numero pari di lati, il centro coincide con il punto d'incontro di tutte le diagonali che congiungono vertici opposti.
Nel caso di poligono con un numero dispari di lati, coincide con il punto d'incontro di tutti i segmenti che uniscono un vertice al punto medio del lato opposto.

TEOREMA. **Se si divide la circonferenza in un numero $n \geq 3$ di archi congruenti e si congiungono gli estremi di archi consecutivi, si ottiene un poligono regolare .**

Dimostrazione
Dividiamo la circonferenza in 5 archi congruenti (vedi figura); otteniamo il pentagono ABCDE.
I lati del pentagono sono tutti congruenti, in quanto corde sottese da archi congruenti, ed anche gli angoli sono tutti congruenti, in quanto inscritti in archi congruenti (si ottengono infatti sommando due archi congruenti)
Dunque il pentagono è regolare poiché ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti.

TEOREMA. **Se si divide la circonferenza in un numero n ≥ 3 di archi congruenti e si tracciano le tangenti alla circonferenza negli estremi di archi consecutivi, i punti intersezione di tali tangenti sono i vertici di un poligono regolare .**

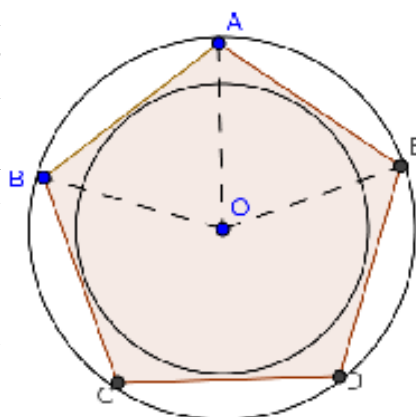
Dimostrazione

Dividiamo nuovamente la circonferenza in 5 archi congruenti, conduciamo le tangenti negli estremi degli archi; otteniamo il pentagono circoscritto ABCDE.

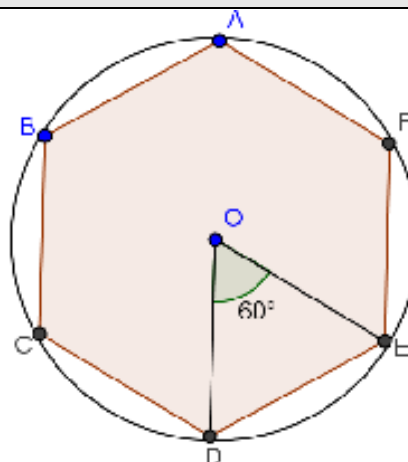
Congiungiamo ora gli estremi di tale archi, ottenendo, in base a quanto dimostrato prima, il pentagono regolare inscritto NOPQR. Consideriamo i triangoli che si vengono così a formare; sono tutti triangoli isosceli in quanto abbiamo: $A\widehat{N}R \cong A\widehat{R}N$; $B\widehat{O}N \cong B\widehat{N}O ;\ldots$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco; inoltre questi angoli sono tutti congruenti tra loro in quanto angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti. Infine i lati compresi tra questi angoli sono anch'essi tutti congruenti tra loro perché lati del pentagono regolare inscritto. Dunque questi triangoli sono tutti congruenti tra loro per il secondo criterio di congruenza. Da qui possiamo dedurre che $\widehat{A} \cong \widehat{B} \cong \widehat{C} \cong \widehat{D} \cong \widehat{E}$ perché angoli al vertice di triangoli isosceli congruenti, e che $AB \cong BC \cong CD \cong DE \cong EA$ perché somme di segmenti congruenti (i lati obliqui dei triangoli isosceli). Quindi il poligono circoscritto, avendo tutti i lati e tutti gli angoli congruenti, è regolare.

TEOREMA. **Ad ogni poligono regolare si può sempre circoscrivere una circonferenza ed in esso se ne può sempre inscrivere un'altra concentrica con la prima.**

Dimostrazione

Consideriamo il pentagono regolare ABCDE. Tracciamo le bisettrici dei due angoli consecutivi $\widehat{B}$, $\widehat{A}$, che s'incontrano in un punto O. Il triangolo BOA è isoscele poiché $O\widehat{B}A \cong O\widehat{A}B$ in quanto metà di angoli congruenti, quindi sarà $BO \cong AO$. Congiungiamo ora O con il vertice E. I triangoli BOA e AOE sono congruenti per il primo criterio di congruenza, poiché hanno : AO in comune, AB≅AE perché lati del poligono regolare, $B\widehat{A}O \cong E\widehat{A}O$ perché metà dello stesso angolo. Dunque avremo che $BO \cong AO \cong EO$. Congiungendo successivamente O con gli altri vertici si arriva a dimostrare in modo analogo che: $BO \cong AO \cong EO \cong DO \cong CO$. Questo vuol dire che O è equidistante dai vertici del poligono,ed è quindi il centro della circonferenza circoscritta.

Dimostriamo ora che ABCDE è circoscritto ad un'altra circonferenza di centro O. I lati del poligono sono corde congruenti della circonferenza ad esso circoscritta, e sappiamo che corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro. Dunque O è equidistante da tutti i lati del poligono, ed è perciò il centro della circonferenza inscritta.

TEOREMA. **Il lato dell'esagono regolare è congruente al raggio della circonferenza circoscritta.**

Dimostrazione

Disegniamo la circonferenza circoscritta di centro O e raggio R, cosa che, in base al teorema precedente, è sempre possibile quando si tratta di un poligono regolare. Congiungiamo due vertici consecutivi dell'esagono con il centro della circonferenza e consideriamo il triangolo DOE. Questo triangolo è isoscele in quanto $OD \cong OE$ perché raggi della circonferenza. Poiché se congiungessimo col centro O gli altri vertici del poligono otterremmo, per quanto dimostrato in precedenza, sei triangoli congruenti, l'angolo al vertice $D\widehat{O}B$ sarà di 60°, in quanto si ottiene dividendo per 6 l'angolo giro. Ma allora anche gli angoli alla base, essendo congruenti tra loro, saranno di 60°, e quindi il triangolo è equilatero, ed essendo $OD \cong OE \cong R$, sarà anche $DE \cong R$.

71 Di quali delle seguenti figure esiste sempre sia la circonferenza inscritta che quella circoscritta?

[A] triangolo equilatero
[B] triangolo isoscele
[C] triangolo rettangolo
[D] rettangolo
[E] rombo
[F] trapezio isoscele
[G] quadrato
[H] parallelogramma
[I] deltoide

72 Dimostra che in un triangolo la distanza tra l'ortocentro e il baricentro è il doppio della distanza tra baricentro e circocentro.

73 Dato il triangolo ABC con $C\widehat{A}B - A\widehat{B}C = 90°$, detti M il punto medio di AB e H il piede dell'altezza relativa ad AB, dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC è uguale ad HM. (Olimpiadi di matematica 1998).

74 Il triangolo ABC ha le mediane BM e NC congruenti. Le diagonali si incontrano nel punto O. Dimostra che BON è congruente a COM.

75 Dimostra che in un esagono regolare ciascun angolo al vertice è diviso in quattro parti uguali dalle diagonali che partono da quel vertice.

76 Sia ABC un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro O, sia DEF il triangolo equilatero simmetrico di ABC rispetto ad O. Dimostra che AFBDCE è un esagono regolare.

77 Sia ABCDE un pentagono regolare; prolunga ciascun lato del pentagono nello stesso verso di un segmento congruente al lato del pentagono. Dimostra che gli estremi dei lati prolungati formano un poligono inscrittibile e circoscrittibile.

78 Sia ABCDEF un esagono regolare, sia G il punto di intersezione delle diagonali BE e CF, dimostra che ABGF è un rombo.

79 Sia P il punto di intersezione delle diagonali di un trapezio isoscele. Dimostra che il diametro passante per P della circonferenza circoscritta al trapezio è perpendicolare alle basi del trapezio.

80 Rispondi a voce alle seguenti domande

a) Quali posizioni reciproche possono assumere una circonferenza e una retta?
b) Quali posizioni reciproche possono assumere due circonferenza una delle quali ha per raggio il doppio del raggio dell'altra circonferenza?
c) Definire il segmento circolare, la corona circolare, l'angolo al centro e l'angolo alla circonferenza.

81 Dimostra che in un triangolo rettangolo, la bisettrice dell'angolo retto è anche bisettrice dell'angolo formato dall'altezza e dalla mediana relative all'ipotenusa.

82 * Dimostrare che ogni parallelogramma circoscrittibile ad una circonferenza è un rombo.

83 * Sia data una circonferenza di centro O inscritta in un trapezio ABCD di basi AB e CD. Dimostrare che gli angoli $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ sono retti.

84 * Si disegni una semicirconferenza di diametro AB e si inscriva un trapezio ABCD di base maggiore AB. Si dimostri che: a) il trapezio è necessariamente isoscele; b) la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC (o, in modo equivalente, la diagonale BD è perpendicolare al lato obliquo AD).

85 * Sia ABCD un quadrato. Dopo aver disegnato le circonferenze inscritta e circoscritta rispetto al quadrato, si dimostri che esse sono concentriche.

86 * Dato un triangolo isoscele ABC, di base AB, siano O il suo incentro e AH e BK rispettivamente le bisettrici degli angoli b A e b B. Dimostrare che il quadrilatero OHCK è circoscrittibile ad una circonferenza.

87 * Si disegnino una circonferenza e quattro rette ad essa tangenti a due a due parallele e siano A, B, C, D i quattro punti di tangenza e E, F, G, H i punti d'intersezione delle rette. Si dimostri che: a) EFGH è un rombo; b) ABCD è un rettangolo.

Quesiti dalle gare di matematica

88 Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con AB > AC; sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Sulla retta BC si prenda D tale che H sia punto medio di BD; sia poi E il piede della perpendicolare condotta da C ad AD. Dimostrare che EH = AH (Olimpiadi della Matematica, gara di secondo livello febbraio 2005)

Suggerimenti: il triangolo ABD è isoscele su base BD quindi... ; considerare poi la circonferenza di diametro AC a cui appartengono i punti H ed ...; osservare angoli alla circonferenza ... archi... corde...

89 Sia ABCD un quadrilatero; chiamiamo E l'intersezione (distinta da A) tra le circonferenze di diametri AB e AC ed F l'intersezione (sempre distinta da A) tra le circonferenze di diametri AC e AD. Dimostrare che: a) se l'angolo EAD è retto, allora BC è parallelo ad AD; b) se gli angoli EAD, FAB sono retti, allora ABCD è un parallelogramma; c) se ABCD è un parallelogramma, allora gli angoli EAD, FAB sono retti.
(Olimpiadi della Matematica, gara di secondo livello febbraio 2006)

Suggerimenti: osservare parallelismi e ricordare il teorema di Talete.

Quesiti dalle prove INVALSI

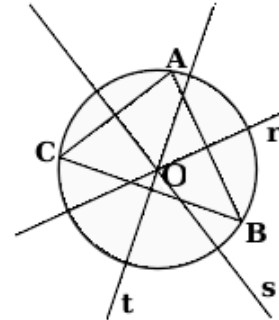
90 Un esagono regolare e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Quanto vale il rapporto fra un lato dell'esagono e un lato del quadrato?

A.2/3 B. 3/4 C. 1 D. 3/2 E. Dipende dal valore del perimetro.

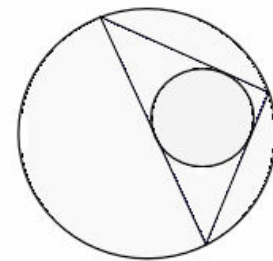
(Prove INVALSI 2003)

91 Osserva la seguente figura. Quale delle seguenti affermazioni relative alla figura è FALSA?

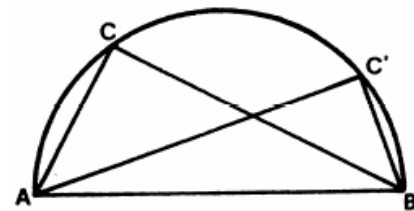
A. Il triangolo ABC è acutangolo.
B. Il punto O è l'intersezione delle altezze del triangolo ABC.
C. Le rette r, s, t sono gli assi dei lati del triangolo ABC.
D. I punti A, B, C sono equidistanti da O.

(Prove INVALSI 2005)

92 Osserva la figura. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

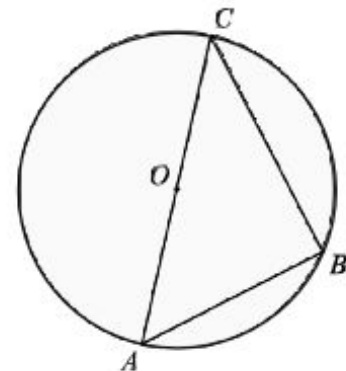
A. Il triangolo è inscritto nella circonferenza minore.
B. Il triangolo è inscritto nella circonferenza maggiore.
C. La circonferenza maggiore è inscritta nel triangolo.
D. Il triangolo è circoscritto alla circonferenza maggiore.

(*Prove INVALSI 2007*)

93 Osserva la figura. I due angoli $A\widehat{C}B$ e $A\widehat{C'}B$ sono uguali? Quali sono le loro ampiezze in gradi?

A. Non sono uguali e $A\widehat{C}B=90°$ e $A\widehat{C'}B=60°$
B. Non sono uguali e $A\widehat{C}B=60°$ e $A\widehat{C'}B=45°$
C. Sono uguali e $A\widehat{C}B=A\widehat{C'}B=60°$
D. Sono uguali e $A\widehat{C}B=A\widehat{C'}B=90°$
E. Sono uguali e $A\widehat{C}B=A\widehat{C'}B=180°$

(*Prove INVALSI 2007*)

94 Nella figura seguente O è il centro della circonferenza, B un punto su di essa e AC un suo diametro. Sapendo che $A\widehat{O}B=80°$, quanto vale $C\widehat{A}B-A\widehat{C}B$?

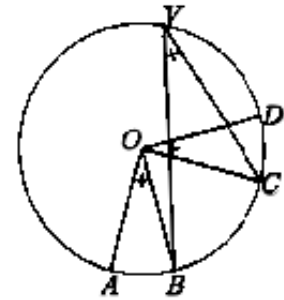
A. 5°
B. 10°
C. 15°
D. 20°
E. 40°

(*Prove INVALSI 2003*)

95 Qual è il massimo numero di punti che una circonferenza e i quattro lati di un quadrato possono avere in comune?

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8 E. 10

(*Prove INVALSI 2003*)

96 Osserva attentamente la figura.
Sapendo che $A\widehat{O}B = C\widehat{O}D = B\widehat{V}C = \alpha$, quanto misura $A\widehat{O}D$?

A. α B. 2 α C. 3 α D. 4 α

(*Prove INVALSI 2005*)

97 Qual è il massimo numero possibile di punti di intersezione fra una circonferenza e un triangolo?

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

(*Prove INVALSI 2005*)

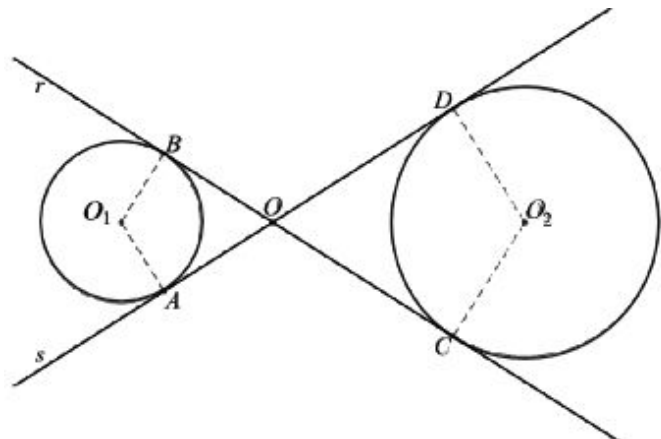
98 Quale delle seguenti affermazione è falsa?

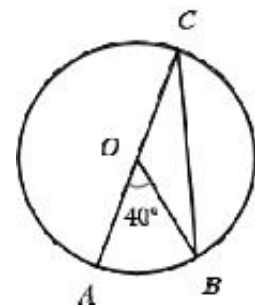
A. In ogni triangolo isoscele l'altezza e la mediana relative alla base e la bisettrice dell'angolo al vertice coincidono.
B. In ogni triangolo isoscele baricentro, incentro, ortocentro e circocentro sono allineati.
C. In ogni triangolo isoscele baricentro, ortocentro, incentro e circocentro coincidono.
D. In ogni triangolo equilatero baricentro, ortocentro, incentro e circocentro coincidono.

(*Prove INVALSI 2005*)

99 Considera la seguente figura.
Se le due circonferenze hanno raggi diversi, quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. Le due circonferenze sono simmetriche rispetto al punto O.
B. Le due circonferenze sono simmetriche rispetto a ciascuna delle rette r e s.
C. $AO_1 : O_2C = OC : AO$
D. $AO_1 : O_2C = AO : OC$

(Prove INVALSI 2006)

100 Nella figura seguente il punto O è il punto medio del diametro AC. L'angolo AOB misura 40°.
Quanto misura l'angolo OBC?

A. 10°
B. 20°
C. 40°
D. 60°

MATEMATICA C3 - GEOMETRIA
6. PROPORZIONALITÀ

Geometria di Ramòn Peco
http://www.flickr.com/photos/desdetasmania/1606257376/

Indice

►1. La misura

Classi di grandezze omogenee

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di ottenere un procedimento teorico per misurare alcuni enti geometrici come segmenti, angoli, superfici, solidi. Non è possibile invece misurare punti, rette, semirette.
L'operazione del misurare consiste sostanzialmente nell'assegnare a una grandezza geometrica, ma non solo, un numero ben definito. Questo numero si ottiene confrontando la grandezza da misurare con una grandezza di riferimento, detta misura campione. Infatti, quello che ci interessa delle grandezze è il fatto di poterle confrontare tra di loro per stabilire qual è la più grande, ed eventualmente effettuarne la somma?
In generale, gli oggetti che ci circondano hanno delle caratteristiche: lunghezza, peso, forma, altezza, superficie, colore, temperatura, morbidezza... Alcune di queste caratteristiche sono confrontabili tra di loro, per esempio la lunghezza di due segmenti, il peso di due corpi, altre non sono confrontabili. Le grandezze che si possono confrontare si dicono **omogenee**. Ci sono poi caratteristiche che sono additive, cioè si lasciano addizionare. Queste caratteristiche che hanno la peculiarità di essere confrontabili e sommabili si chiamano **grandezze**.
Nei capitoli precedenti abbiamo visto come confrontare e sommare segmenti, confrontare e sommare angoli. Vogliamo fare la stessa cosa con gli archi di circonferenza, le superfici e i volumi.
Non possiamo evidentemente confrontare e sommare punti, perché i punti sono tutti congruenti tra di loro e sommando due punti non otteniamo un altro punto ma due punti. Non possiamo confrontare rette perché sono tutte congruenti tra di loro, non possiamo sommarle perché non otterremmo un'altra retta. Non possiamo per esempio sommare due triangoli. Né possiamo confrontare segmenti con angoli perché non sono grandezze omogenee, non sono dello stesso tipo; non possiamo confrontare angoli con superfici perché non sono omogenee tra di loro...
Diamo ora il concetto generale di classe di grandezze.

DEFINIZIONE. Un insieme di grandezze geometriche si dice che forma una **classe di grandezze** quando:

1) date due qualunque grandezze, è sempre possibile **confrontarle**, cioè stabilire se sono uguali, o, in caso contrario, quali di esse sia la maggiore e quale la minore;

2) è sempre possibile definire un'operazione di **somma** tra grandezze, che goda delle proprietà associativa e commutativa.

Le grandezze di una stessa classe si dicono **omogenee**.

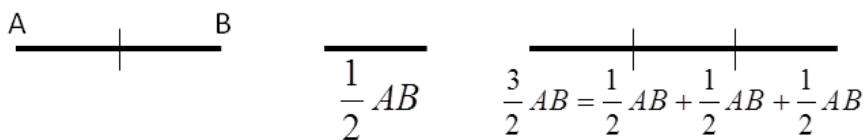
A partire da questa definizione possiamo dare quella di multiplo e sottomultiplo.

DEFINIZIONE. Data una grandezza geometrica *A* ed un numero naturale *n*, la grandezza geometrica *B* si dice **multipla** di *A* secondo il numero *n* se è data dalla somma di *n* grandezze tutte uguali ad *A*; scriveremo $B = n \cdot A$. In questo caso A è definita grandezza **sottomultipla** di B secondo il numero naturale *n*; scriviamo $A=\frac{B}{n}$.

Dato un segmento AB possiamo dare un significato alla scrittura $\frac{3}{2}AB$ nel seguente modo:

A B

$\frac{1}{2}AB$

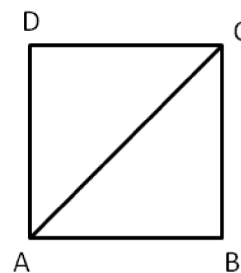
$\frac{3}{2}AB=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AB$

Il segmento $\frac{3}{2}AB$ è costituito da 3 segmenti ciascuno congruente alla metà di AB.

DEFINIZIONI. Due grandezze omogenee *A* e *B* si dicono **commensurabili** quando esiste una terza grandezza *C*, ad esse omogenea, che è sottomultipla sia di *A* che di *B*: $A=n\cdot C$, $B=m\cdot C$.

Due grandezze omogenee *A* e *B* si dicono **incommensurabili** quando non esiste una terza grandezza *C*, ad esse omogenea, che sia sottomultipla sia di *A* che di *B*.

L'esistenza di grandezze incommensurabili è confermata dal seguente teorema.

TEOREMA. **Il lato e la diagonale di un quadrato sono grandezze incommensurabili.**

Dimostrazione. La dimostrazione si sviluppa per assurdo. Con riferimento alla figura, verifichiamo che il lato AB e la diagonale AC del quadrato ABCD sono incommensurabili.
Per assurdo, supponiamo che esista una grandezza U, omogenea sia al lato sia alla diagonale, che sia un sottomultiplo comune, cioè $AC=n\cdot U$, $AB=m\cdot U$
Per il teorema di Pitagora $AC^2=AB^2+BC^2$ e poiché $AB=BC$ si ha $AC^2=AB^2+AB^2=2AB^2$. Tenendo conto che $AC=n\cdot U$, $AB=m\cdot U$ la formula precedente ci permette di affermare che $n^2\cdot U^2=2\mathrm{m}^2\cdot U^2$. Dividendo per U^2 ambo i membri dell'uguaglianza otteniamo $n^2=2\mathrm{m}^2$, dove n e m sono due numeri naturali. E' abbastanza facile dimostrare che questa uguaglianza non può sussistere. Infatti, se m è un numero pari allora m^2 avrà un numero pari di fattori uguali a 2, ma allora $2m^2$ avrà un numero dispari di fattori uguali a 2, ciò implica che anche n^2 deve avere un numero dispari di fattori uguali a 2; se m è dispari allora $2m^2$ avrà un solo fattore uguale a 2 e di conseguenza non può essere uguale al quadrato di un numero n. Da cui l'assurdo che m non può essere né pari né dispari ■

Storicamente, questa è stata la prima scoperta di grandezze incommensurabili, probabilmente dovuta al Ippaso di Metaponto, matematico vissuto tra Crotone e Metaponto (MT) nel 500 a.C. circa. La tradizione dice che morì in un naufragio per aver rivelato la scoperta dell'esistenza delle grandezze incommensurabili, in contrasto con il pensiero del maestro Pitagora.

Siano A e B due grandezze omogonee commensurabili sia C la grandezza sottomultipla in comune, si avrà $A=n\cdot C$ e $B=m\cdot C$. Da cui $C=\frac{1}{n}A$ e $C=\frac{1}{m}B$. Dal confronto si ha $\frac{1}{n}A=\frac{1}{m}B$ da cui $A=\frac{n}{m}B$.

DEFINIZIONE. Si dice **rapporto di due grandezze omogenee** A e B il numero razionale $\frac{n}{m}$ tale che $A=\frac{n}{m}B$.

Occorre supporre la validità dei seguenti postulati.
POSTULATO DELLA DIVISIBILITA'. Ogni grandezza geometrica è sempre divisibile in un numero qualunque di parti.
POSTULATO DI EUDOSSO-ARCHIMEDE. Date due grandezze omogenee disuguali esiste sempre una grandezza multipla della minore che supera la maggiore.

Possiamo dare ora la definizione di misura di un segmento rispetto a un altro, nel caso in cui i due segmenti sono commensurabili.

DEFINIZIONE. Date due grandezze A e U commensurabili tra di loro si definisce **misura di A rispetto a U** il numero razionale $\frac{m}{n}$ per il quale $A=\frac{m}{n}U$. La grandezza U viene detta **unità di misura**, la sua misura rispetto ad U è evidentemente 1.

Solitamente si usa come unità di misura delle lunghezze il metro, con il suo multipli (decametro, ettometro, chilometro, ...) e i suoi sottomultipli (decimentro, centimetro, millimetro, …). Per misurare gli angoli si usa il grado che è $\frac{1}{360}$ dell'angolo giro. Per misurare le superfici si usa come unità di superficie quella di un quadrato di lato 1 m. Per misurare i solidi si usa il volume di un cubo di lato 1m.
Circa la scrittura delle misure, in Italia valgono le seguenti norme: l'unità di misura si scrive sempre dopo il numero che la indica, tranne le misure monetarie: si scrive 12m e non m 12; si scrive € 12 e non 12 €. L'unità di misura non è mai seguita dal puntino, non va mai espressa al plurale.

E' possibile estendere la definizione di rapporto, e la conseguente definizione di misura, anche per la grandezze incommensurabili, come per esempio lato e diagonale dello stesso quadrato. Il percorso però è più lungo e complesso, poiché il rapporto tra due grandezze commensurabili è sempre un numero razionale mentre il rapporto tra due grandezze incommensurabili non è un numero razionale.

Partiamo dalla definizione di classi contigue.

DEFINIZIONE. Due classi di grandezze omogenee (ad esempio, di segmenti) si dicono **classi contigue** se godono delle seguenti proprietà :

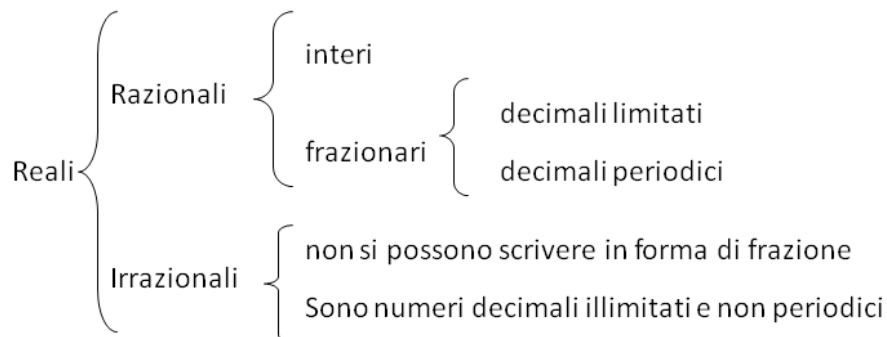
1) sono **separate**: ogni grandezza della prima classe è minore di ogni grandezza della seconda classe. Vale a questo proposito il **postulato della continuità**, secondo il quale due classi di grandezze separate ammettono almeno un elemento separatore (ce n'è sicuramente uno, ma potrebbero anche essercene infiniti), cioè una grandezza che sia maggiore (o uguale) di ogni grandezza della prima classe e minore (o uguale) di ogni grandezza della seconda .

2) godono della **proprietà dell'avvicinamento indefinito**: presa una grandezza ε , piccola a piacere, omogenea a quelle date, esiste sempre una grandezza della seconda classe ed una della prima la cui differenza sia minore di ε.

Per due classi di grandezze contigue vale l'assioma di Cantor: **due classi di grandezze contigue ammettono uno e un solo elemento separatore**.

Basandoci sul concetto di contiguità possiamo a questo punto definire un qualunque **numero irrazionale** come l'unico elemento separatore tra due classi contigue di numeri razionali; nella prima classe mettiamo tutti i numeri che approssimano il numero irrazionale per difetto, nella seconda quelli che lo approssimano per eccesso.
Prendendo come esempio il numero irrazionale √2 le due classi sono:
A: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ....
B: 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ...
Si può osservare che le due successioni sono separate, in quanto ogni numero della prima è minore di ogni numero della seconda, inoltre godono della proprietà dell'avvicinamento indefinito, in quanto è sempre possibile trovare un numero razionale appartenente ad A ed uno appartenente a B la cui differenza sia minore di un qualsiasi numero ε, per quanto piccolo questo si prenda.
Quindi, per l'assioma di Cantor, esiste ed è unico l'unico elemento separatore di queste due successioni; possiamo identificare questo numero con la coppia di successioni e scrivere: √2 = (A,B).
Questa definizione vale non solo per i numeri irrazionali, ma anche per i numeri razionali. Per esempio, la frazione $\frac{15}{4}=3{,}75$ è definita dalle classi contigue:
A: 3; 3,7; 3,74; 3,749; 3,7499; ...
B: 4; 3,8; 3,76; 3,751; 3,7501; ...
Possiamo naturalmente definire in questo modo anche i numeri interi. Per esempio 5 è l'elemento separatore delle classi:
A: 4; 4,9; 4,99; 4,999; ...
B: 6; 5,1; 5,01; 5,001; ...
Concludiamo affermando che un qualunque numero reale *r* può essere definito come l'elemento separatore di una coppia di classi numeriche contigue.

I numeri reali sono quindi il raggruppamento di numero razionali e irrazionali:

- Reali
  - Razionali
    - interi
    - frazionari
      - decimali limitati
      - decimali periodici
  - Irrazionali
    - non si possono scrivere in forma di frazione
    - Sono numeri decimali illimitati e non periodici

Passiamo ora a definire la misura delle grandezze incommensurabili.

Date le lunghezze incommensurabili AB e CD, poniamo

$$A=\left\{\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^+ \mid \frac{m}{n}CD<AB\right\} \quad , \quad B=\left\{\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^+ \mid \frac{m}{n}CD>AB\right\}$$

Si dimostra che la coppia (A, B) è una coppia di classi contigue di Q^+. In maniera intuitiva possiamo dire che A contiene i valori approssimati per difetto e B contiene i valori approssimati per eccesso del rapporto $\frac{m}{n}$.

Chiamiamo rapporto fra le lunghe incommensurabili AB e CD il numero irrazionale dato dalle classi contigue (A,B).

1 Vero/falso

(a) Date due grande A e B è sempre possibile confrontarle per stabilire qual è la più grande [V] [F]

(b) Due grandezze geometriche si dicono commensurabili quando esiste una terza grandezza che è sottomultipla comune alle altre due [V] [F]

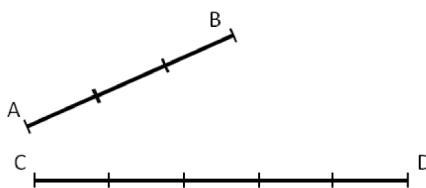
(c) Un qualunque numero razionale può essere definito come elemento separatore di due classi numeriche contigue [V] [F]

(d) La misura di un segmento è un segmento [V] [F]

(e) la diagonale di un quadrato è incommensurabile [V] [F]

2 L'insieme delle ampiezze degli angoli rappresenta una classe di grandezze omogenee? Giustifica la risposta.

3 Disegna un segmento AB a piacere, costruisci poi il segmento $CD=\frac{3}{5}AB$.

4 Qual è il rapporto tra i segmenti AB e CD rappresentati in figura? Indica nel disegno quale può essere l'unità di misura comune ad entrambi.

5 Disegna due segmenti AB e CD per i quali valga il rapporto $\frac{3}{2}AB=\frac{2}{3}CD$.

6 E' possibile che due angoli siano tra loro incommensurabili?

7 E' possibile che i perimetri di due quadrati siano tra loro incommensurabili? Fai un esempio.

8 In quali casi le due grandezze A e B sono incommensurabili?

[A] $A=\frac{1}{3}B$ [B] $A=1{,}3\,B$ [C] $A=1{,}\overline{3}\,B$ [D] $A=\sqrt{2}\,B$

9 Nel triangolo rettangolo ABC, i cateti AB e AC hanno rapporto $\frac{3}{4}$, qual è il rapporto tra l'ipotenusa BC e il cateto AB, sono grandezze tra di loro commensurabili?

10 Dalle relazioni $AB=CD+\frac{1}{2}EF$ e $\frac{2}{3}CD=\frac{1}{4}EF$, disegna i segmenti AB, CD, EF scegliendo una opportuna unità di misura e determina la misura di AB rispetto a CD. $\left[R.\ AB=\frac{7}{3}CD\right]$

11 Il segmento AB misura $3a$, quanto misura rispetto a $\frac{1}{2}a$?

12 Per quale dei seguenti valori di a il numero $\sqrt{a}$ è un numero irrazionale?

[A] 1 [B] 2 [C] 3 [D] 4 [E] 5 [F] 6 [G] 8 [H] 9 [I] 10

►2. Proporzionalità tra grandezze

DEFINIZIONE. Date quattro grandezze A,B,C,D, le prime due omogenee tra loro così come le ultime due, queste **formano una proporzione** se il rapporto delle prime due è uguale al rapporto delle ultime due. Si scrive A : B = C : D e si legge : A sta a B come C sta a D.

Terminologia
Il primo ed il terzo termine (A e C) si chiamano **antecedenti.**
Il secondo ed il quarto termine (B e D) si chiamano **conseguenti.**
B e C si chiamano **medi**.
A e D si chiamano **estremi**.
La grandezza D si chiama **quarta proporzionale**.

Se in una proporzione tra grandezze tutte omogenee i medi sono uguali tra loro A : B = B : C, la proporzione si dice **continua**, e la grandezza B si chiama **media proporzionale**; la grandezza C si dice **terza proporzionale**.

TEOREMA FONDAMENTALE. **Condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro grandezze siano in proporzione è che siano in proporzione le loro misure**.

Dimostrazione → (condizione necessaria)
Dimostriamo innanzitutto che la condizione è necessaria: supposto che le quattro grandezze siano in proporzione, dimostriamo che sono in proporzione le loro misure.
Siano A e B due grandezze omogenee, *a* e *b* le loro misure rispetto ad un'unità di misura omogenea ad A e B; C e D due grandezze anch'esse omogenee tra loro e *c* e *d* le loro misure rispetto ad un'unità di misura omogenea a C e D .
IPOTESI: A : B = C : D
TESI: a : b = c : d
Applicando il teorema secondo cui il rapporto tra due grandezze è uguale al quoziente delle loro misure, avremo: $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ e $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$. Ma per ipotesi $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ e quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, avremo che $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ che si può anche scrivere nella forma *a : b = c : d*

Dimostrazione ← (condizione sufficiente)
Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente :
IPOTESI: a : b = c : d
TESI: A : B = C : D
Sempre dal teorema citato precedentemente, poiché $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ e $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$, Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza avremo che $\frac{a}{B}=\frac{C}{D}$, vale a dire A : B = C : D.

C.V.D.

Ricordiamo che per la proporzionalità tra numeri vale la seguente

PROPRIETA'. **Condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro numeri siano in proporzione è che il prodotto dei medi sia uguale al prodotto degli estremi.**

►3. Proprietà delle proporzioni

Grazie al teorema fondamentale possiamo trasferire le proprietà delle proporzioni tra numeri alle proprozioni tra grandezze.

1. Proprietà dell’invertire
Scambiando ogni antecedente col proprio conseguente otteniamo una nuova proporzione.
Quindi se abbiamo la proporzione A : B = C : D , applicando la proprietà dell'invertire otterremo:

B : A = D : C.

2. Proprietà del permutare
Se le quattro grandezze sono tutte omogenee, possiamo scambiare tra loro i medi o gli estremi, ed otterremo sempre una nuova proporzione.
Quindi dalla proporzione A : B = C : D, applicando la proprietà del permutare otterremo:

A : C = B : D ed anche D : B = C : A

3. Proprietà del comporre
La somma delle prime due grandezze sta alla prima (o alla seconda) grandezza come la somma delle altre due sta alla terza (o alla quarta)
Data dunque la proporzione A : B = C : D, applicando questa proprietà avremo:

(A + B) : A = (C + D) : C oppure anche : (A + B) : B = (C + D) : D

4. Proprietà dello scomporre
La differenza tra la prima e la seconda grandezza sta alla prima (o alla seconda) grandezza come la differenza tra le altre due sta alla terza (o alla quarta). Questa proprietà richiede che ogni antecedente sia maggiore del proprio conseguente.
Se dunque A > B, C > D , avremo che, data la proporzione A : B = C : D, si otterrà:

(A - B) : A = (C - D) : C oppure anche : (A - B) : B = (C - D) : D

In riferimento alla disuguaglianza precedente, va precisato che se quattro grandezze sono in proporzione, tra antecedenti e conseguenti intercorre sempre la stessa relazione, vale a dire che , se la prima grandezza è uguale, maggiore o minore della seconda, anche la terza sarà uguale, maggiore o minore della quarta.

TEOREMA DELLA QUARTA PROPORZIONALE. **Date tre grandezze A, B e C, con A e B omogenee tra loro, esiste ed è unica una grandezza D, omogenea alla terza, che con le tre date formi una proporzione.**

Dimostrazione
Siano A, B e C tre grandezze, le prime due omogenee tra loro. Supponiamo che esista una quarta grandezza X, omogenea a C, tale che valga la proporzione A : B = C : X.
Sostituendo alle grandezze le loro misure, per il teorema fondamentale dovrà essere a : b = c : x
Applichiamo ora la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche, uguagliando il prodotto dei medi a quello degli estremi ax = bc.
Risolvendo l’equazione in x otteniamo $x=\frac{bc}{a}$, e poiché a, b e c sono diversi da zero (e positivi), in quanto misure di grandezze geometriche, quest’equazione avrà come soluzione uno e un solo numero reale (positivo), in quanto la soluzione di un’equazione di primo grado, se esiste, è unica.
Questo numero reale sarà quindi la misura della quarta grandezza X, e poiché, tra grandezze omogenee, ad ogni numero reale corrisponde una e una sola grandezza, questa quarta proporzionale esiste ed è unica.

►4. Grandezze direttamente proprozionali

Consideriamo due classi di grandezze:

A, B, C, D, ….

A', B', C', D',….

Queste due classi si dicono in **corrispondenza biunivoca** quando ad ogni grandezza della prima classe corrisponde una e una sola grandezza della seconda e viceversa.

Le grandezze A e A', B e B', C e C', .. si dicono **corrispondenti**.

Le grandezze di queste due classi si dicono **direttamente proporzionali** quando il rapporto di due grandezze qualunque della prima classe è uguale al rapporto delle due grandezze corrispondenti della seconda classe, cioè quando valgono le proporzioni :

$$A : B = A' : B' \;;\; A : C = A' : C' \;;\; B : C = B' : C' \;; \dots$$

Se poi le grandezze della prima classe sono omogenee con quelle della seconda, allora possiamo permutare i medi:

$$A : A' = B : B' \;;\; A : A' = C : C' \;;\; B : B' = C : C' \;; \dots$$

E, applicando la proprietà transitiva dell'uguaglianza:

$$A : A' = B : B' = C : C' = \dots = k,$$

da cui segue che **il rapporto tra due grandezze corrispondenti è costante**. Questo rapporto costante è un numero detto **costante di proporzionalità**.

Se le grandezze della prima classe non fossero omogenee con quelle della seconda, dovremmo passare dalla proporzionalità tra le grandezze a quella tra le loro misure (reso sempre possibile dal teorema fondamentale), ed in questo caso sarebbe il rapporto tra le loro misure ad essere costante.

Per determinare se due classi di grandezze sono direttamente proporzionali si applica il seguente teorema (1):

TEOREMA 1. **Condizione necessaria e sufficiente affinchè due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che:**

1. a grandezze uguali della prima classe corrispondano grandezze uguali della seconda

2. alla somma di due o più grandezze della prima classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti della seconda classe.

Dimostrazione → (condizione necessaria)

Dimostriamo che la condizione è necessaria, cioè che se le grandezze sono proporzionali, allora devono valere le due proprietà.

Dette A e B due grandezze della prima classe, e A', B' le grandezze corrispondenti della seconda classe, per ipotesi avremo $A : B = A' : B'$.

Se A=B , il loro rapporto è 1, e tale deve essere il rapporto tra A' e B', da cui segue A' = B'.

Quindi la prima proprietà è verificata.

Applichiamo ora alla proporzione data la proprietà del comporre $(A + B) : A = (A' + B') : A'$

Se C è la grandezza della prima classe tale che C = A + B, sostituendo nella proporzione avremo:

$C : A = (A' + B') : A'$

Se C' è la grandezza che corrisponde a C, poiché per ipotesi le due classi di grandezze sono direttamente proporzionali, dovrà valere anche la seguente proporzione:

$(A + B) : A = C' : A'$, e per l'unicità della quarta proporzionale dovrà essere $C' = A' + B'$.

Anche la seconda proprietà risulta dunque verificata.

Dimostrazione ← (condizione sufficiente)

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente: se valgono le due proprietà, le due classi di grandezze sono direttamente proporzionali.

Consideriamo due grandezze qualunque della prima classe A e B; possono essere uguali o disuguali.

Se A = B, allora per la prima proprietà sarà pure A' = B'; poiché $A : B = 1$ e $A' : B' = 1$, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza dovrà essere $A : B = A' : B'$, quindi il rapporto tra due grandezze qualunque della prima classe è uguale al rapporto delle grandezze corrispondenti della seconda, e perciò le due classi di grandezze sono direttamente proporzionali.

Supponiamo ora A e B disuguali, sia ad esempio A > B. Questo vuol dire che esiste una terza grandezza C tale che A = B + C. Per la seconda proprietà, a B + C corrisponde B' + C' , e per la prima proprietà, ad A = B + C corrisponde A' = B' + C', da cui si deduce che A' > B'.

Analogamente si dimostra che se A < B, allora A' < B'.

Sempre per la seconda proprietà, moltiplicando le grandezze per uno stesso numero naturale avremo che ad nA corrisponderà nA' e ad mB corrisponderà mB'. Per quanto premesso, avremo che se nA = mB, sarà anche nA' = mB'; se nA > mB, sarà anche nA' > mB' ed infine, se nA < mB , ne deriverà che nA' < mB'.
Questo vuol dire che, andando a costruire il rapporto tra le grandezze, avremo:

$$\frac{A}{B}=\frac{m}{n}\rightarrow\frac{A'}{B'}=\frac{m}{n}$$
$$\frac{A}{B}>\frac{m}{n}\rightarrow\frac{A'}{B'}>\frac{m}{n}$$
$$\frac{A}{B}<\frac{m}{n}\rightarrow\frac{A'}{B'}<\frac{m}{n}$$

Dunque i rapporti $\frac{A}{B}$ e $\frac{A'}{B'}$ ammettono gli stessi valori approssimati per difetto o per eccesso, e quindi questi rapporti rappresentano lo stesso numero reale, per cui concludendo si ha:
A : B = A' : B'. In questo modo la tesi è verificata.

►5. Grandezze inversamente proporzionali

Le grandezze di due classi in corrispondenza biunivoca si dicono inversamente proporzionali quando il rapporto di due grandezze qualunque della prima classe è uguale al rapporto inverso delle due grandezze corrispondenti della seconda classe, cioè quando valgono le proporzioni:

A : B = B' : A' ; A : C = C' : A' ; B : C = C' : B' ; …

Se dalla proporzionalità tra le grandezze passiamo a quella tra le loro misure avremo:

a : b = b' : a' ; a : c = c' : a' ; b : c = c' : b', …

Applicando la proprietà fondamentale della proporzionalità tra numeri (il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi) avremo:

aa' = bb' ; aa' = cc' ; bb' = cc' ; ….

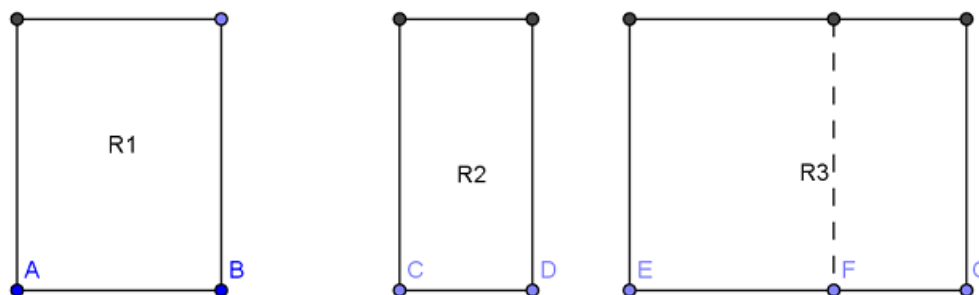
E, applicando la proprietà transitiva dell'uguaglianza:

aa' = bb' = cc' = ….=k,

da cui segue che **il prodotto tra le misure di due grandezze corrispondenti è costante**. Anche in questo caso il prodotto costante è un numero detto **costante di proporzionalità**.

►6. Teoremi su particolari classi di grandezze direttamente proporzionali

TEOREMA 2. **I rettangoli aventi altezze congruenti sono proporzionali alle rispettive basi.**

Dimostrazione
Consideriamo la classe di grandezze costituita da tutti i rettangoli con altezze congruenti e la classe costituita dalle rispettive basi. Queste due classi sono in corrispondenza biunivoca, in quanto ad ogni rettangolo corrisponde una ed una sola base e viceversa.

Per dimostrare che queste due classi sono direttamente proporzionali applichiamo il teorema 1 dimostrato precedentemente. Dobbiamo cioè verificare che siano soddisfatte le due proprietà.
Prima proprietà: a grandezze uguali della prima classe devono corrispondere grandezze uguali della seconda.
Si nota facilmente che questa proprietà è sempre verificata, in quanto se si suppone che AB = CD, allora anche i rettangoli che hanno questi segmenti come base, avendo anche le altezze congruenti, saranno sicuramente congruenti.
Seconda proprietà: ad un segmento che sia la somma di due segmenti deve corrispondere un rettangolo che sia la somma di due rettangoli aventi quei segmenti come base.

Supponiamo infatti EG = AB + CD; prendiamo su EG il punto F che divida il segmento in due parti: EF=AB, FG=CD. Tracciando la perpendicolare in F ad EG, questa divide il rettangolo R3 in due rettangoli rispettivamente congruenti ad R1 e ad R2, e quindi R3= R1+R2.
Poiché dunque valgono le due proprietà richieste dal teorema, avremo che:
R1 : R2 = AB : CD, R2 : R3 = CD : EG, … , e quindi le due classi di grandezze sono direttamente proporzionali.
In modo analogo si dimostra che:
I rettangoli aventi basi congruenti sono direttamente proporzionali alle rispettive altezze.
Gli archi di un stessa circonferenza sono direttamente proporzionali ai corrispondenti angoli al centro.

13 Se tra quattro grandezze omogenee è vera la proporzione x : y = v : z, quali delle seguenti proporzioni sono vere di conseguenza?
[A] x : v = y : z [B] x : z = v : y
[C] v : x = x : y [D] z : y = v : x

14 Sapendo che $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}$ e $\frac{x}{z}=\frac{5}{4}$ completa la proporzione x : z = … : …

15 Sapendo che $\frac{x}{y}=\sqrt{(2)}$ e $\frac{x}{z}=\sqrt{(3)}$ completa la proporzione x : z = … : ...

16 Quattro grandezze A, B, C, D sono tali che 3A=2B, 3C=2D. Verifica se sono in proporzione e in caso affermativo costruisci la proporzione.

17 Dimostra che se vale la proporzione 3A : 2B = 3C : 2D vale anche la proporzione A : B = C : D.

18 Siano A, B, C, D, E, F, G grandezze omogenee, dimostra che, se A : B = C : D e B : G = F : C dimostra che A : F = G : D.

19 Le misure delle lunghezze dei lati di un triangolo sono proporzionali ai numeri 5, 6 e 10, sapendo che il perimetro misura 273 cm, determina le misure dei lati del triangolo.

20 Stabilire se in una stessa circonferenza le corde sono direttamente proporzionali ai corrispondenti angoli (convessi) al centro.

21 Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono proporzionali ai numeri 6, 8, 10, determina le ampiezze degli angoli.

22 Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono proporzionali ai numeri 3 e 4, determina le ampiezze degli angoli.

23 I lati di un rettangolo sono proporzionali ai numeri 6 e 15, sapendo che il perimetro del rettangolo misura 120 cm, determina le misure in cm dei lati del rettangolo.

24 Determina le misure dei lati di un trapezio sapendo che sono proporzionali ai numeri 3, 4, 5, 4 e che il perimetro è 80cm. Di che tipo di trapezio si tratta?

25 Il perimetro di un rettangolo misura 12 m. Sapendo che le sue misure sono nel rapporto 2/3, determina le misure dei lati.

26 Le misure di due segmenti sono tali che la loro differenza è 23 cm e che il loro rapporto è 4/5. Determina attraverso una proporzione le misure dei segmenti.

27 Determina le ampiezze degli angoli di un triangolo rettangolo sapendo che stanno tra di loro come 7 sta a 4.

28 La differenza di due segmenti misura 7cm, determina le loro misure sapendo che
a) uno è il doppio dell'altro
b) uno è il triplo dell'altro
c) uno è la metà dell'altro
d) uno è la quarta parte dell'altro

29 La somma di due segmenti misura 12cm, determina le loro misure sapendo che
a) uno è il doppio dell'altro
b) uno è il triplo dell'altro
c) uno è la metà dell'altro
d) uno è la quarta parte dell'altro

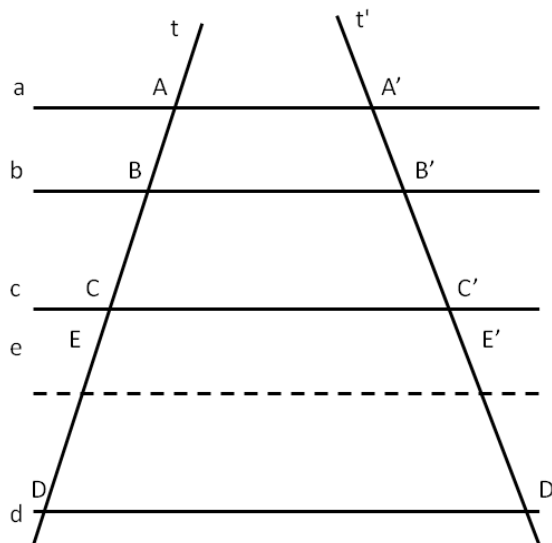
30 Determina le misure di due angoli α e β sapendo che
a) $\alpha=\frac{2}{3}\beta$ e $\alpha+\beta=130°$
b) $\alpha=\beta+12°$ e $\frac{\alpha}{\beta}=3$
c) $\beta=\frac{3}{4}\alpha$ e $\alpha-\beta=15°$
d) $\beta=\frac{1}{2}\alpha$ e α e β sono complementari

►7. Teorema di Talete, caso generale

TEOREMA DI TALETE. **Un fascio di rette parallele determina su due trasversali classi di segmenti direttamente proporzionali.**

Assumiamo come ipotesi di avere cinque rette parallele a, b, c, d, e. Dimostriamo che sono in proporzione i segmenti
AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C' = BD : B'D' = …

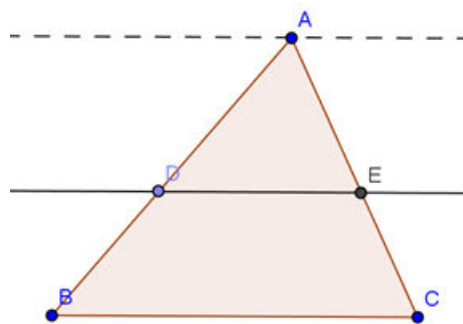
A questo scopo ricorriamo alla condizione necessaria e sufficiente dimostrata nel capitolo sulla proporzionalità tra grandezze: condizione necessaria e sufficiente affinchè due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che:
1) a grandezze uguali della prima classe corrispondano grandezze uguali della seconda;
2) alla somma di due o più grandezze della prima classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti della seconda classe.
La prima proprietà è stata dimostrata nel capitolo 5, quando abbiamo esposto il teorema di Talete: a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.
Dimostriamo allora che vale anche la seconda proprietà.

Consideriamo il fascio di rette parallele tagliato da due trasversali della figura.
Abbiamo come ipotesi che CD = AB + BC, dobbiamo dimostrare che C'D' = A'B' + B'C'.
Poiché CD = AB + BC, determiniamo al suo interno il punto E che lo divide nei due segmenti: CE=AB, ED=BC. Tracciamo la parallela alle rette date passante per F, che intersecherà la trasversale t' nel punto F' . Per la prima parte del teorema, avremo che da CF=AB segue che C'F' = A'B' e da FD = BC segue che F'D'=B'C'. Ma C'D'=C'F' + F'D' = A'B' + B'C'■

Conseguenze del teorema di Talete

Dal teorema di Tale discendono due importanti corollari

COROLLARIO 1. **Una retta parallela ad un lato di un triangolo determina sugli altri due lati, o sui loro prolungamenti, segmenti proporzionali.**

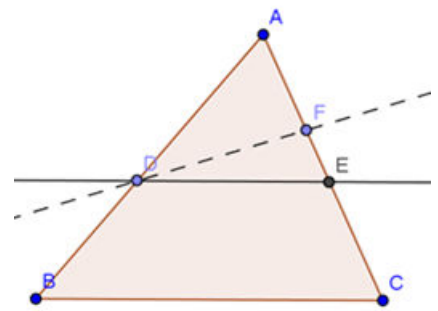
Dimostrazione
Sia ABC il triangolo in questione. Tracciamo una retta parallela al lato BC che intersechi gli altri due nei punti D ed E. Vogliamo dimostrare che AE : AD = EC : DB.

Tracciamo una retta passante per A e parallela a DE e a BC. Ci troviamo così nelle condizioni di poter applicare il teorema di Talete, in quanto abbiamo tre rette parallele tagliate da due trasversali (AB ed AC), per cui possiamo scrivere la proporzione tra segmenti corrispondenti AE : AD = EC : DB.
La stessa dimostrazione vale nel caso in cui la parallela al lato BC intersecasse i prolungamenti dei lati AB e AC■

COROLLARIO 2. **La retta che divide due lati di un triangolo (o i loro prolungamenti) in segmenti proporzionali è parallela al terzo lato.**

Dimostrazione

Abbiamo in ipotesi che AE : AD = AC : AB e dobbiamo dimostrare che DE è parallela a BC.

Ragioniamo per assurdo; neghiamo quindi la tesi e supponiamo che DE non sia parallela a BC. Esisterà allora un'altra retta passante per D e che sia parallela a BC; questa retta intersecherà il lato AC in un punto F. Per il teorema precedente avremo che AF : AD = AC : AB.

Ma per il teorema della quarta proporzionale sappiamo che la quarta grandezza che con le tre date forma una proporzione deve essere unica, e quindi il punto F deve coincidere con E e la retta DF coincidere con la retta DE, che perciò è parallela a BC■

Un'altra importante conseguenza del teorema di Talete è il teorema della bisettrice.

TEOREMA DELLA BISETTRICE. **la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.**

Dimostrazione

L'ipotesi è $A\hat{B}D = D\hat{B}C$; la tesi AD : DC = AB : BC.

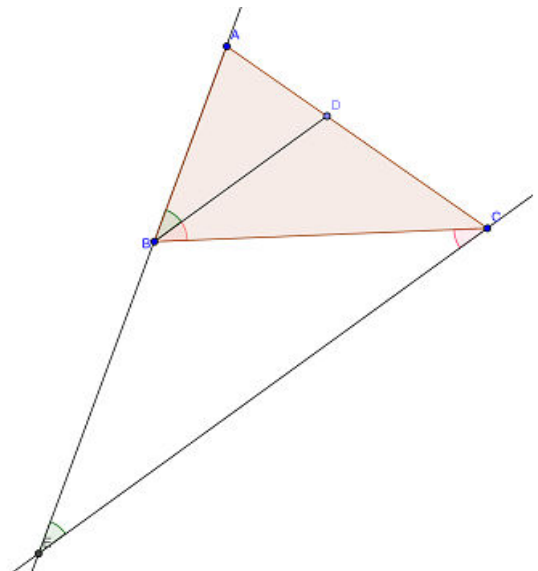
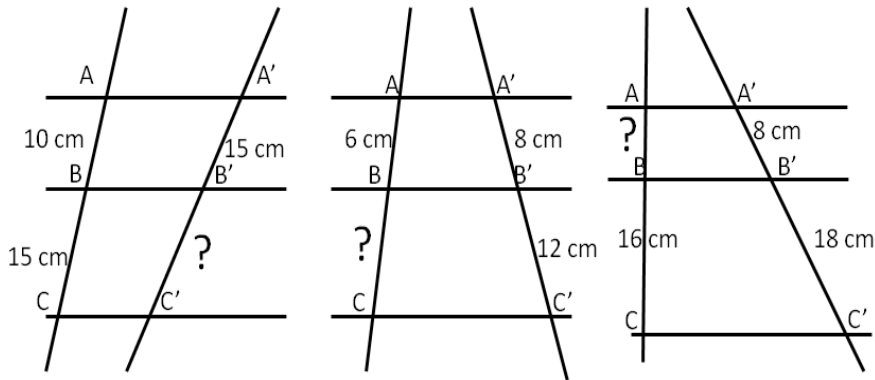
Dal vertice C tracciamo la parallela alla bisettrice BD che incontra il prolungamento del lato AB in E. Notiamo le seguenti congruenze tra angoli:

$A\hat{B}D = B\hat{E}C$ in quanto corrispondenti rispetto alle parallele BD ed EC tagliate da AE;

$D\hat{B}C = B\hat{C}E$ in quanto alterni interni rispetto alle parallele BD ed EC tagliate da BC.

Confrontando queste congruenze con quella in ipotesi ed applicando la proprietà transitiva della congruenza possiamo scrivere $B\hat{E}C = B\hat{C}E$. Dunque il triangolo BEC è isoscele e per questo ha due lati congruenti BE = BC.

Applichiamo ora il primo corollario del teorema di Talete al triangolo AEC si ha AB : BE = AD : DC.

Per quanto appena dimostrato possiamo sostituire BC a BE ed avremo AB : BC = AD : DC■

31 Determina in ogni figura la misura mancante, indicata con un punto interrogativo.

32 Con riferimento alla figura, quali proporzioni sono conseguenza del teorema di Talete?

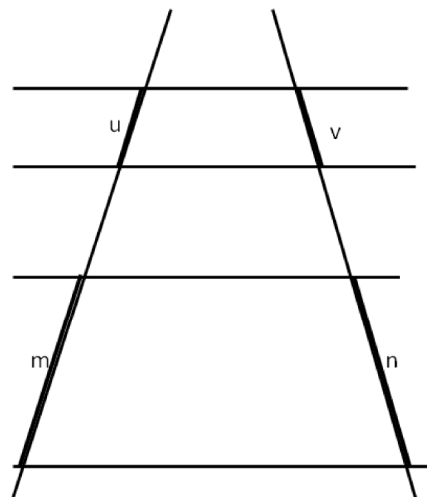
[A] u : v = m : n

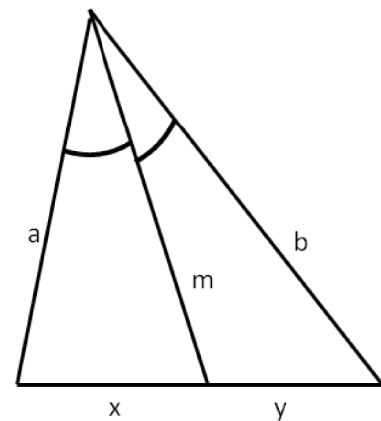
[B] u : m = v : n

[C] (u+m) : m = (v+n) : n

[D] v : m = u : n

[E] (u + v) : (m + n) = m : n

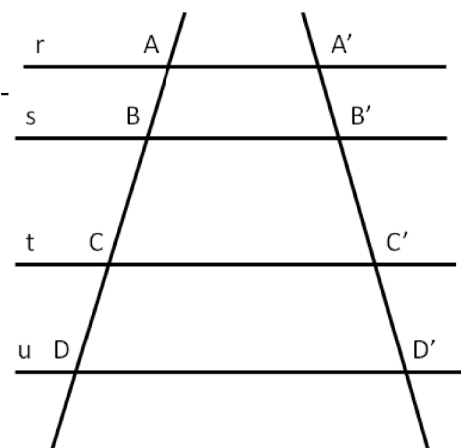
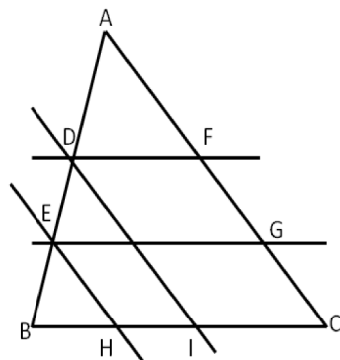
[F] (m-u) : u = (n-v) : v

33 In figura c'è un triangolo e una delle sue bisettrici, quali proporzioni sono conseguenza del teorema della bisettrice?

[A] a : b = x : y

34 Sapendo che le rette r, s, t, u sono parallele completa le proporzioni

(a) AB : CD = … : ...

(b) AC : BD = … : …

(c) AB : … = … : B'C'

(d) AC : A'C' = … : …

35 Nel triangolo ABC, individua sul lato AB i punti D ed E, con D più vicino ad A. Da D ed E traccia le parallele sia al lato AC che al lato BC, come in figura. Dimostra che sussiste la seguente proporzione AC:BC=FG:HI.

36 Dato un triangolo qualunque ABC, si consideri il punto medio M del lato AB. Si consideri il segmento parallelo al lato BC che parte da M ed incontra il lato AC nel punto N. Si prolunghi questo segmento di un segmento ND uguale ad MN. Dimostrare che il quadrilatero MDCB è un parallelogramma. Esplicita ipotesi, tesi, fai il disegno e dimostra la tesi.

37 Dato un parallelogramma ABCD, si consideri M il punto medio del lato AB. Si congiunga il vertice D con il punto M; si congiunga il vertice A con il punto medio N del segmento DM. Dimostrare che la retta AN divide la diagonale DB del parallelogramma in due parti di cui una è il doppio dell'altra.

38 Due rette incidenti r e s si incontrano in un punto A; sulla retta r considera i punti A' e A", individua su s le proiezioni ortogonali di A' e A" e chiama questi punti rispettivamente con B' e B". Dimostra che sussiste la seguente proporzione AA' : AA" = BB' : BB".

39 Dal baricentro G di un triangolo ABC manda la parallela al lato AB, sia A' il punto in cui questa parallela incontra il lato AC. Dimostra che CA' è il doppio di A'A. Ricorda le proprietà del baricentro.

40 Dato il trapezio ABCD, sia E il punto di intersezione dei due lati non paralleli AD e BC. Dimostra che una qualsiasi retta per E che incontri i lati paralleli del trapezio nei punti K e L, determina due segmenti EK e KL il cui rapporto è costante.

41 Dimostrare che, in un trapezio, il segmento che congiunge i punti medi dei lati non paralleli è uguale alla semisomma delle basi.

42 Nel parallelogramma ABCD si individuino il punto E su AB tale che AB : AE = 3 : 2 e il punto F su DC tale che DC : FC = 3 : 2. Traccia la diagonale DB e le rette AF ed EC, le quali intersecano DB rispettivamente in L e in M. A quali numeri sono proporzionali i segmenti DL, LM, MB?

43 Dimostra che nel triangolo ABC la mediana AM è il luogo dei punti medi delle parallele al lato BC.

44 Nel triangolo ABC prendi un punto qualsiasi D su AB, da D traccia la parallela ad AC che incontra BC in E, da E traccia la parallela ad AB che incontra AC in F, da F traccia la parallela a BC che incontra AB in G, da G la parallela ad AC che incontra BC in H, da H la parallela ad AB che incontra AC in I e così via. Ripeti questa costruzione fino a che non trovi il primo punto che va a sovrapporsi a uno dei punti trovati in precedenza. Esiste questo punto? Qual è? Dimostra perché.

45 Nel triangolo ABC traccia la bisettrice AK dell'angolo in A. Sapendo che la somma dei lati adiacenti all'angolo misura 47cm, che BK : CK = 3 : 4 e che BK misura 7cm, determinare le misure dei lati del triangolo.

46 Dal punto K della mediana AM del triangolo ABC traccia le parallele ai tre lati del triangolo, siano D ed E i punti di intersezione di AB e AC con la parallela a BC, siano F e G i punti di intersezione delle altre due parallele con il lato BC. Dimostra che AK è mediana del triangolo ADE e che KM è la mediana del triangolo KFG.

47 Sia E il punto di intersezione delle diagonali del trapezio ABCD, dimostra che AE : EC = BE : ED.

48 Dimostra che in qualsiasi triangolo ABC la retta che passa per i punti medi dei lati AB e AC divide in due parti uguali l'altezza relativa a BC.

49 * In un triangolo ABC sia AM la mediana relativa al lato BC. Da un punto D interno al lato BC si conduca la parallela ad AM che incontra la retta AB in E e la retta AC in F. Dimostrare che AF:AC=AE:AB.

50 * Dimostrare che in ogni trapezio le diagonali si dividono scambievolmente in parti tra loro direttamente proporzionali.

51 * In un triangolo ABC sia AM la mediana relativa al lato BC. Da un punto D del segmento BM si tracci la parallela ad AM che incontra AB in E e la retta AC in F. Dimostrare che DC:DM=FC:FA.

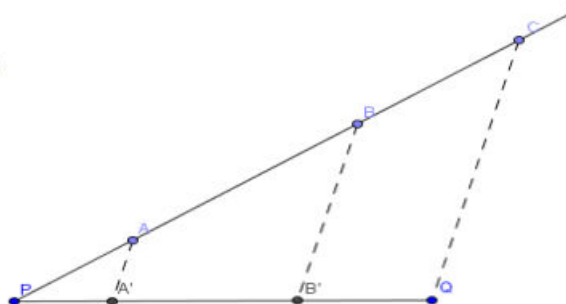
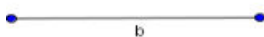
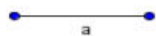
52 * Sia AM la mediana relativa al lato BC di un triangolo ABC, e siano MD la bisettrice dell'angolo $A\hat{M}B$ e ME la bisettrice dell'angolo $A\hat{M}C$ rispettivamente nei triangoli AMB e AMC. Dimostrare che DE e BC sono parallele.

53 * Da un punto P del lato AB del triangolo ABC conduci la parallela alla mediana AM relativa al lato BC, la quale incontra la retta AC in Q. Si dimostri che AB : AC = AP : AS.

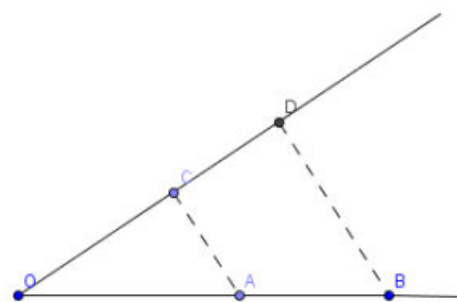
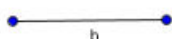
54 * Applicando il teorema di Talete, dividi, con riga e compasso, un qualunque segmento AB in 5 parti.

Gli esercizi contrassegnati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pag. 173, licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

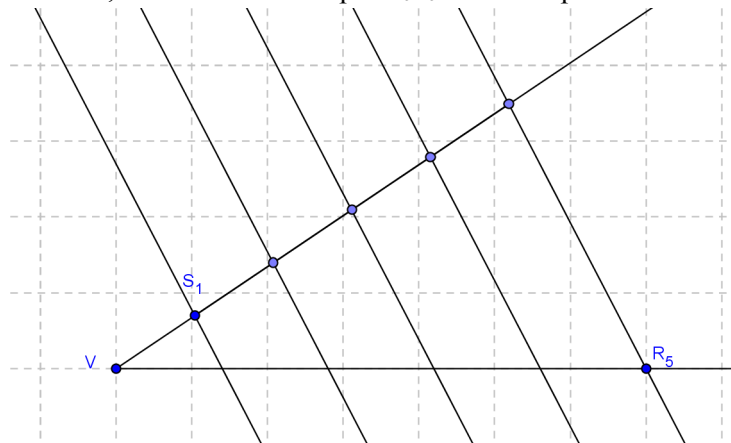
Dividere un dato segmento in parti direttamente proporzionali a più segmenti dati.

Sia PQ il segmento da dividere in parti direttamente proporzionali a tre segmenti dati a, b, c.
Da un suo estremo, ad esempio P, si tracci una semiretta (non contenete Q) e su di essa si prendano i segmen ti PA, AB, BC rispettivamente congruenti ad a, b, c ; si unisca C con Q e si traccino per A e per B le parallele a CQ che incontrano il segmento PQ rispettivamente in A', B'. Il segmento PQ risulta così diviso nei segmenti PA',A'B', B'Q che, per il teorema di Talete, sono direttamente proporzionali ai segmenti a, b, c .

Da notare che se i segmenti dati fossero tutti fra loro congruenti, il problema equivarrebbe a quello della divisione di un dato segmento in un numero assegnato di parti congruenti.

Costruire il segmento quarto proporzionale dopo tre segmenti dati.

Siano a, b, c, i tre segmenti dati; si vuol costruire un segmento d tale che valga la proporzione a:b=c:d.
Si consideri un angolo di vertice O e su un suo lato si prendano i punti A e B tali che i segmenti OA ed AB siano congruenti rispettivamente ai segmenti a e b; sull'altro lato dell'angolo si prenda il punto C tale che il segmento OC sia congruente al segmento c. Si traccino la retta AC e la parallela ad essa per B, indicando con D il punto in cui quest'ultima incontra la semiretta OC. Per il teorema di Talete il segmento CD è il quarto proporzionale richiesto.

Si noti che, per il teorema della quarta proporzionale, il segmento richiesto è unico, quindi si giunge allo stesso segmento indipendentemente dall'angolo utilizzato nella costruzione.
Nel caso particolare in cui b = c, la costruzione appena descritta consente di trovare il segmento terzo proporzionale dopo due segmenti dati.

55 Dato un angolo di vertice V e lati due semirette r ed s, staccare su r il segmento VR_5 e su S il segmento VS_1, di lunghezza arbitraria. Successivamente, usando un compasso, staccare su s i segmenti S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4 e S_4S_5, tutti congruenti a VS_1. Dimostrare che, tracciando la retta per R_5S_5 e le corrispondenti parallele per S_1, S_2, S_3 ed S_4, il segmento VR_5 risulta suddiviso in parti uguali.

Osservando che questo procedimento può essere esteso per induzione a qualunque numero finito di segmenti, si può constatare che la divisibilità di un segmento in parti uguali non è un postulato autonomo, ma una proprietà intrinseca della geometria euclidea.

MATEMATICA C3 – GEOMETRIA
7. SIMILITUDINE

Variousness Photo by: Rufux
http://www.flickr.com/photos/rufux/3263094309

Indice

► 1. Avere la stessa forma

Osserviamo le coppie di figure sotto rappresentate e cerchiamo di capire cosa intendiamo dire quando affermiamo che due figure hanno la stessa forma.

I due cerchi della figura hanno certamente la stessa forma.

In questa figura, poli3 e poli4 hanno gli angoli rispettivamente congruenti, ma non possiamo dire che abbiano la stessa forma.

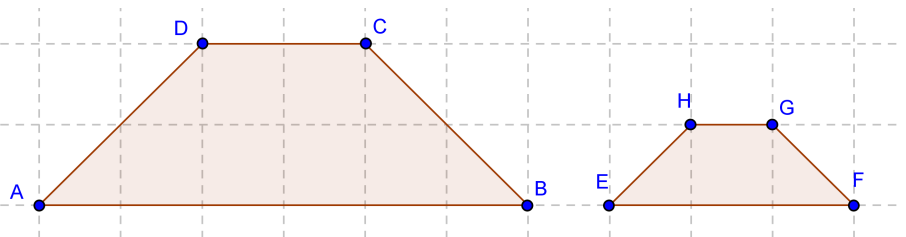
In questa figura osserviamo che i lati di HKLM sono rispettivamente la metà dei lati di DEFG, ma anche in questo caso non possiamo dire che i due disegni abbiano la stessa forma: gli angoli formati dai lati non sono rispettivamente congruenti.

In questa figura poligono1 e poligono2 non hanno la stessa forma, addirittura non hanno lo stesso numero di lati.

I triangoli AWZ e BCZ hanno la stessa forma. Hanno gli angoli rispettivamente congruenti. Inoltre, essendo B punto medio di WZ e C punto medio di AZ, i lati di BCZ sono ciascuno la metà dei corrispondenti lati del triangolo AWZ, anche il lato BC che congiunge i punti è la metà di AW, per un teorema che hai già studiato; in definitiva, il rapporto tra BC e WA, tra BZ e WZ, tra CZ e AZ è sempre di 1 a 2; i lati sono quindi in proporzione AZ : CZ = WZ : BZ = AW : BC.

DEFINIZIONE. Due poligoni P e Q aventi angoli rispettivamente congruenti e lati in proporzione si dicono **simili** e scriviamo P~Q.

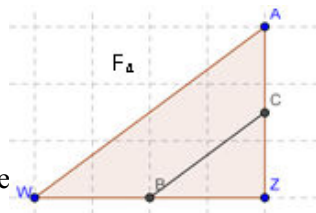
Nella figura precedente, i due triangoli AWZ e CBZ sono simili.

Sono simili anche i due trapezi della figura seguente, hanno infatti gli angoli congruenti e i lati in proporzione: i lati del primo trapezio sono tutti il doppio dei lati del secondo trapezio.

DEFINIZIONI. Si chiamano **omologhi** sia i vertici degli angoli rispettivamente congruenti sia i lati e le diagonali che congiungono vertici omologhi. Si chiama **rapporto di similitudine** il rapporto tra due lati omologhi.

Relativamente ai due trapezi della figura precedente:

- sono vertici omologhi A e E; … e … ; … …. … … ...
- sono lati omologhi DC e HG; … e … ; … … … … …
- sono diagonali omologhe … … … … … … … … …
- il rapporto di similitudine è … …

Osservazione. Se due poligoni sono congruenti allora sono anche simili con rapporto di similitudine 1.

1 Nella figura a lato:
sono omologhi i vertici
… … … …
sono omologhi i lati
… … … … … … … …
il rapporto di similitudine è … …

2 In un trapezio congiungete i punti medi dei lati obliqui, sono simili i due trapezi in cui quello dato risulta spezzato dalla congiungente tracciata?

3 Congiungete i punti medi M, N, P rispettivamente dei lati AB, AC, BC di un triangolo ABC; determinate il valore di verità della proposizione: MNP ~ ABC e il rapporto di similitudine è 0.5.

4 È vero che due poligoni regolari aventi lo stesso numero di lati sono simili?

5 Assegnato il quadrato MNPQ, costruite il quadrato M'N'P'Q' la cui diagonale sia doppia della diagonale MP. È vero che M'N'P'Q'~MNPQ? Qual è il rapporto di similitudine? Costruite il quadrato M"N"P"Q" avente diagonale metà di MP. È vero che M"N"P"Q"~MNPQ? Qual è il rapporto di similitudine? È vero che valgono le seguenti relazioni tra le aree dei tre quadrati?

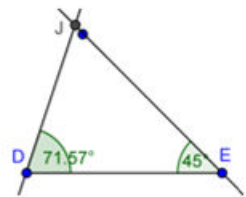
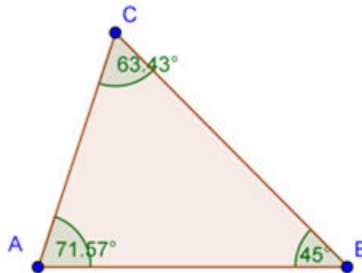
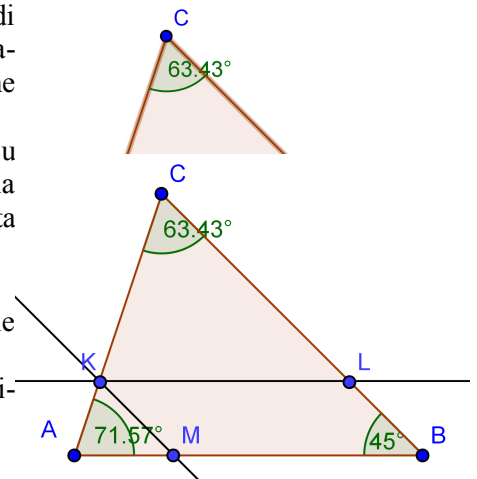
$$Area_{MNPQ}=\frac{1}{2}Area_{M'N'P'Q'}=2\cdot Area_{M''N''P''Q''}$$

6 Motivate la verità della proposizione: "la relazione espressa dal predicato essere simili introdotta nell'insieme dei poligoni, è una relazione d'equivalenza". (Verifica che gode della proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva).

►2. La similitudine nei triangoli

La definizione di triangoli simili non si differenzia da quella data per i poligoni. Per i triangoli, però, esistono dei teoremi, detti criteri, che permettono di verificare se due triangoli sono simili restringendo le verifiche da effettuare.

PRIMO CRITERIO DI SIMILITUDINE. **Due triangoli aventi due angoli rispettivamente congruenti sono simili.**

Dimostrazione :
Osserviamo che se due triangoli hanno due angoli congruenti, per il teorema della somma degli angoli interni di un triangolo, avranno anche il terzo angolo congruente.
Nella figura, i due triangoli ABC e DEJ hanno $\hat{A}\cong\hat{D}$ e $\hat{B}\cong\hat{E}$ di conseguenza $\hat{C}\cong\hat{J}$.
Vogliamo dimostrare che i due triangoli hanno anche i lati in proporzione.
Se DJ=AC i due triangoli sarebbero congruenti per il secondo criterio di congruenza, in quanto hanno un lato e i due angoli adiacenti rispettivamente congruenti, dunque anche simili, il rapporto di similitudine sarebbe 1.
Esaminiamo allora il caso $DJ\neq AC$, in particolare $DJ<AC$. Su AC fissiamo un punto K in modo che CK=DJ e tracciamo da questo la parallela al lato AB che incontra CB in L; il triangolo CKL risulta congruente al triangolo DJE avendo $CK\cong DJ;\hat{K}\cong\hat{D};\hat{C}\cong\hat{J}$.
Inoltre per il teorema di Talete possiamo scrivere la proporzione CA : CK = CB : CL. Se tracciamo da K la parallela al lato CB che incontra AB in M, per il teorema di Talete si ha CA : CK = AB : MB.
KLBM è un parallelogramma per costruzione quindi KL=MB e sostituendo nella precedente proporzione otteniamo CA : CK = AB : KL.
Confrontando le proporzioni ottenute possiamo scrivere
CA : CK = AB : KL = CB : CL e dalla congruenza tra i triangoli CKL e DJE concludiamo CA : DJ = AB : DE = CB : JE.

SECONDO CRITERIO DI SIMILITUDINE. **Due triangoli aventi due lati in proporzione e l'angolo tra essi compreso congruente sono simili.**

Con riferimento alla figura

Ipotesi

AC : DF = AB : DE

$C\hat{A}B \cong F\hat{D}E$

Tesi

$\hat{C} \cong \hat{F}\ ;\ \hat{B} \cong \hat{E}$

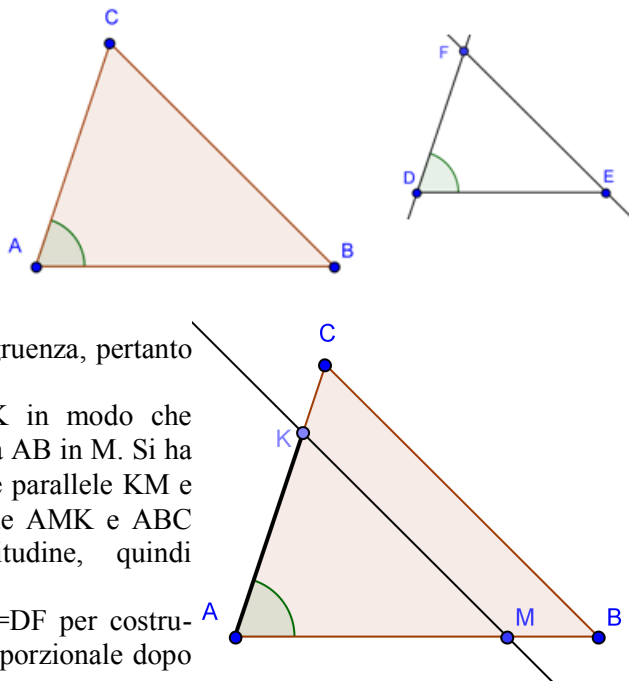
CB : FE = AB : DE

Dimostrazione

Se DF=AC, dalla proporzione in ipotesi AC:DF=AB:DE si avrebbe $DE \cong AB$ e i due triangoli sarebbero congruenti per il primo criterio di congruenza, pertanto anche simili.

Supponiamo AC>DF; su AC fissiamo un punto K in modo che AK=DF, da K tracciamo la parallela a CB che incontra AB in M. Si ha che $\hat{M} \cong \hat{B}, \hat{K} \cong \hat{C}$ perché corrispondenti delle rette parallele KM e CB rispettivamente con trasversale AB e AC, dunque AMK e ABC sono simili per il primo criterio di similitudine, quindi AB:AM=AC:AK=CB:KM.

Confrontiamo i primi due rapporti con l'ipotesi AK=DF per costruzione, quindi AM=DE poiché la grandezza quarta proporzionale dopo tre date è unica.

I due triangoli AKM e DFE risultano congruenti avendo AK=DF per costruzione, AM=DE per averlo dimostrato, $\hat{A} \cong \hat{D}$. Di conseguenza i due triangoli hanno anche gli altri elementi congruenti, cioè KM=DE, $\hat{M} \cong \hat{E}, \hat{K} \cong \hat{F}$. Dai risultati ottenuti possiamo concludere AB:DE=AC:DF=BC:FE■

TERZO CRITERIO DI SIMILITUDINE. **Due triangoli aventi i lati in proporzione sono simili.**

Ipotesi

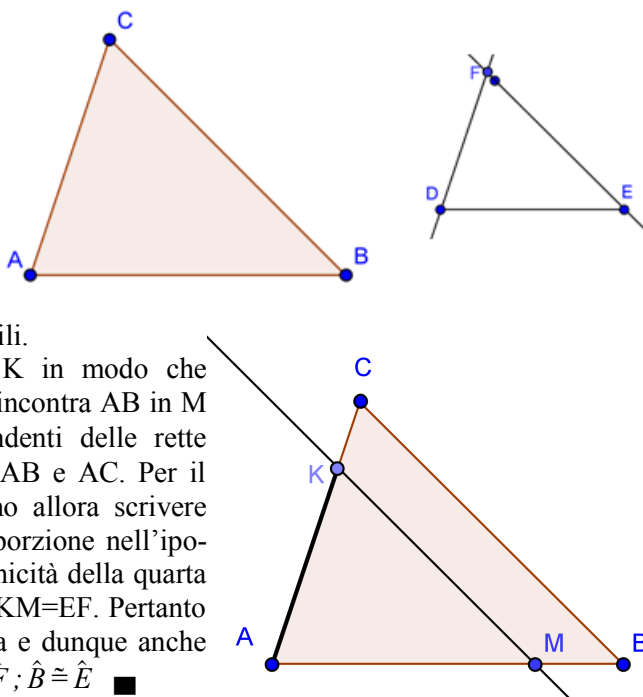
AC : DF = AB : DE = CB : EF

Tesi

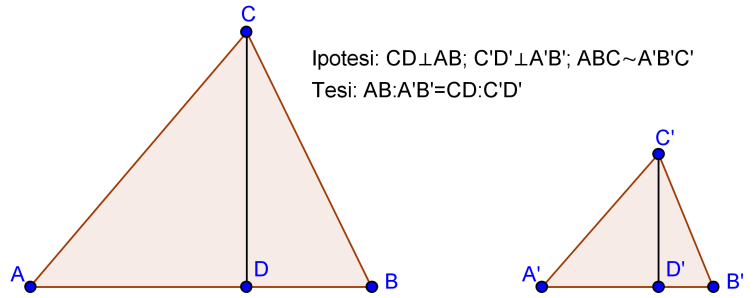
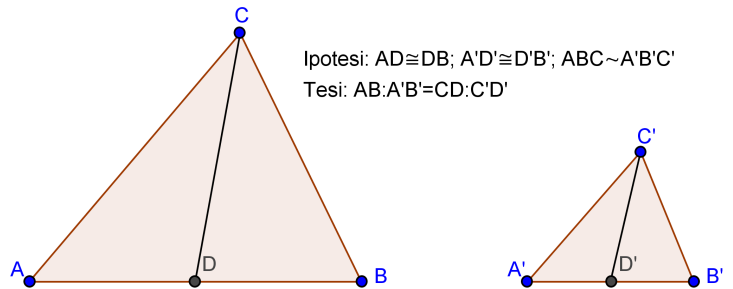
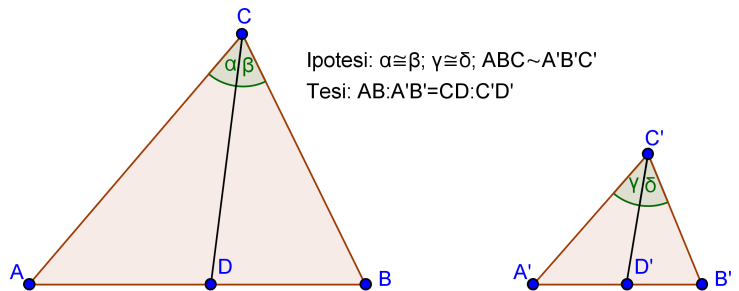
$\hat{A} \cong \hat{D}\ ;\hat{C} \cong \hat{F}\ ;\hat{B} \cong \hat{E}$

Dimostrazione

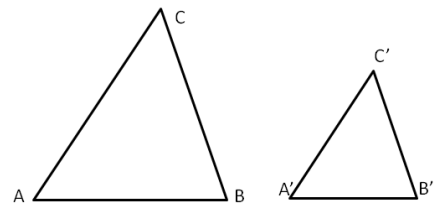
Se DF=AC, dall'ipotesi si avrebbe anche DE=AB e FE=CB, i due triangoli sarebbero allora congruenti per il terzo criterio di congruenza e dunque anche simili.

Supponiamo AC>DF; su AC fissiamo un punto K in modo che AK=DF e da questo tracciamo la parallela a CB che incontra AB in M ottenendo $\hat{M} \cong \hat{B}$ e $\hat{K} \cong \hat{C}$ perché corrispondenti delle rette parallele KM e CB rispettivamente con trasversale AB e AC. Per il primo criterio di similitudine ABC~AKM, possiamo allora scrivere AC:AK=AB:AM=CB:KM; confrontando con la proporzione nell'ipotesi e tenendo presente la costruzione effettuata e l'unicità della quarta proporzionale si deducono le congruenze AM=DE e KM=EF. Pertanto risulta AMK=DEF per il terzo criterio di congruenza e dunque anche $\hat{A} \cong \hat{D}, \hat{K} \cong \hat{F}, \hat{M} \cong \hat{E}$; quindi anche $\hat{A} \cong \hat{D}\ ;\hat{C} \cong \hat{F}\ ;\hat{B} \cong \hat{E}$ ■

►3. Proprietà dei triangoli simili

Negli esercizi precedenti abbiamo dimostrato che

- In due triangoli simili il rapporto di due lati omologhi è uguale al rapporto tra le rispettive altezze.

- In due triangoli simili il rapporto di due lati omologhi è uguale al rapporto tra le rispettive mediane.

- In due triangoli simili il rapporto di due lati omologhi è uguale al rapporto tra le bisettrici uscenti da due vertici omologhi.

Ricordiamo che **il rapporto di similitudine è il rapporto tra due lati omologhi**.

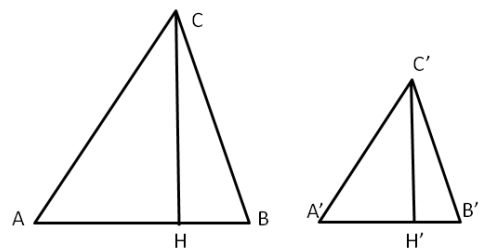
TEOREMA 1. **Il rapporto tra i perimetri di due triangoli simili è uguale al rapporto di similitudine.**

Ipotesi: AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'
Tesi: 2p : 2p' = AB : A'B'
Dimostrazione
Dall'ipotesi, applicando la proprietà del comporre si ha
(AB+AC+BC):AB=(A'B'+A'C'+B'C'):A'B'
permutando i medi si ottiene la tesi
(AB+AC+BC):(A'B'+A'C'+B'C')=AB:A'B' ■

TEOREMA 2. **Il rapporto tra le aree di due triangoli simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.** (Una definizione più rigorosa dell'area di un poligono verrà data nel capitolo seguente)

Ipotesi: AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'
Tesi: $Area_{(ABC)} : Area_{(A'B'C')} = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$
Dimostrazione
Prendiamo come riferimento la figura, sappiamo che

$$Area_{(ABC)} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH} \quad \text{e} \quad Area_{(A'B'C')} = \frac{1}{2}\overline{A'B'}\cdot\overline{C'H'}$$

quindi $\dfrac{Area_{(ABC)}}{Area_{(A'B'C')}} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{\overline{A'B'}\cdot\overline{C'H'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}\cdot\dfrac{\overline{CH}}{\overline{C'H'}}$

Per quanto stabilito al primo punto di questo paragrafo il rapporto tra le altezze è uguale al rapporto tra le basi: $\dfrac{Area_{(ABC)}}{Area_{(A'B'C')}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}\cdot\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$ ■

7 Dimostrate che la parallela ad un lato di un triangolo che intersechi gli altri due, determina un triangolo simile al dato. Scrivete la proporzione che sussiste tra i lati.

8 Nel triangolo isoscele ABC di vertice A, traccia la mediana AM e dal punto M traccia la perpendicolare al lato obliquo AB. Individua tutti i triangoli simili che si vengono a formare nella figura.

9 Nel triangolo ABC traccia l'altezza AH relativa al lato BC e l'altezza CK relativa al lato AB. Individua tutti i triangoli simili che si vengono a formare nella figura.

10 Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in B, traccia la bisettrice AL e da L la perpendicolare all'ipotenusa AC. Individua tutti i triangoli simili che si vengono a formare nella figura.

11 Nel trapezio ABCD di basi AB e CD, detto P il punto d'incontro delle diagonali, risultano simili i triangoli ABP e CDP. Se le basi sono una doppia dell'altra, concludete la proposizione:" il punto P divide ciascuna diagonale in … … …

12 Dal punto K dell'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC tracciate la perpendicolare all'ipotenusa stessa che incontra le rette dei cateti AC e AB rispettivamente nei punti F e G. Dimostrate: FKC~FAG ; GKB~GAF. Se AC:AB=7:5 è vero che lo stesso rapporto sussiste tra i cateti dei triangoli nominati?

13 Nel trapezio rettangolo ABCD con AD perpendicolare alle basi, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Dimostrate che i due triangoli in cui la diagonale divide il trapezio sono simili. Nella prima riga della seguente tabella abbiamo posto i lati di un triangolo; voi dovrete completare la seconda riga con i lati omologhi dell'altro triangolo e quindi completare la proporzione AB: ….=AC: ……=AB: …….

ABC	CB	AC	AB
ADC	...	...	...

14 ABC e A'B'C' sono due triangoli simili, CR e C'R' sono le bisettrici rispettivamente degli angoli $\hat{C}$ e $\hat{C}'$ ($R \in AB$ e $R' \in A'B'$). Dimostrate che CR : C'R' = AB : A'B'. Se CR e C'R' sono rispettivamente le altezze relative ad AB e A'B', vale la stessa proporzione? È possibile dimostrare, utilizzando il primo criterio di similitudine, che tale proporzione sussiste anche se CR e C'R' fossero le mediane relative ad AB e A'B'?

15 In un trapezio ABCD di basi AB=4cm, DC=8cm, traccia le diagonali AC, che misura 7,62cm, e DB che misura 5,83cm. Indicato con K il punto di intersezione delle diagonali, determina l misure in cui ciascuna diagonale resta divisa dall'altra. [2,54; 5,08; 3,89; 1,94]

16 Nel triangoloABC traccia le altezze AH e BK. Dimostra che il triangolo CHK è simile al triangolo ABC. O*sserva che BKA e AHB sono inscrittibili in una semicirconferenza.*

17 Siano BH e CK due altezze del triangolo ABC. Dimostra che AKH è simile ad ABC. *Osserva che BCK e BCH sono inscrittibili in una semicirconferenza.*

18 Un trapezio ha le basi di 4cm e 10cm, i lati obliqui di 4,57cm e 5,94. Prolungando i lati obliqui si ottiene un triangolo che ha in comune con il trapezio la base minore. Determina il perimetro del triangolo. R.[21,52cm].

19 Dimostra che due triangoli sono simili se hanno i lati del primo triangolo rispettivametne perpendicolari ai lati del secondo triangolo.

20 In un trapezio rettangolo la base minore CD è doppia del lato obliquo BC e questo è i 5/4 del lato AD perpendicolare alle due basi. Sapendo che l'area del trapezio è 184cm^2, calcolare la misura della distanza di D dalla retta BC. [16cm]

21 Nel triangolo ABC, traccia da un punto M del lato AB la parallela a BC; essa incontra AC in N. Traccia poi la bisettrice AL del triangolo; essa incontra MN in K. Dimostra che AMK è simile ad ABL.

22 Da un punto P dell'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC invia le parallele ai cateti del triangolo. Esse individuano Q au AB e R su AC. Dimostra che sono simili i triangoli ABC, QBP, RPC.

23 Due circonferenze, di centri O ed O' e raggi di misura rispettivamente 6cm e 12cm, sono tangenti esternamente in A; da O si tracci una tangente alla circonferenza di centro O' e sia B il punto di tangenza. Indicato con M il punto in cui il segmento BO incontra la circonferenza di centro O, calcolare le misure dei lati del triangolo AOM. [6cm, 4cm, …]

24 Il rapporto tra l'altezza AH e la base BC del triangolo isoscele ABC è 2:3. Indicata con D la proiezione ortogonale di C sulla retta AB, dimostrare che D è un punto interno al segmento AB. Si costruisca poi il triangolo ECD, isoscele su base CD e simile ad ABC, in modo che il punto E si trovi dalla stessa parte di A rispetto a BC. Si dimostri che CE è parallelo ad AH, che i triangoli CDB e CEA sono simili e che il quadrilatero ECDA è inscrivibile in una circonferenza.

25 Dimostrate che in due triangoli simili le mediane relative a due lati omologhi rispettano il rapporto di similitudine.

26 Due segmenti AB e CD si tagliano in un punto P in modo che AP:PD=CP:PB. Dimostra che $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\hat{C} \cong \hat{B}$.

27 Sui segmenti consecutivi AB e AC si prendano rispettivamente i punti H e K in modo che

$AH \cong \frac{3}{4} AB$ e $AK \cong \frac{3}{4} AC$. Dimostrate che HK è parallelo a BC.

28 Prolungate, dalla parte di A, i lati congruenti AB e AC del triangolo isoscele ABC, di due segmenti congruenti AE e AF. Dimostrate che FE è parallelo a BC.

29 Da un punto A su una circonferenza tracciare le corde AB e AC, si prolunghi AB di un segmento BD pari alla metà di AB e si prolunghi AC di un segmento CE pari alla metà di AC. Dimostra che il triangolo ABC è simile al triangolo ADE.

30 In quali dei seguenti casi i due triangoli indicati sono simili?

a) se hanno due coppie di lati in proporzione V F
b) se hanno due coppie di angoli in proporzione V F
c) se hanno due coppie di angoli congruenti V F
d) se hanno una coppia di lati in proporzione e una coppia di angoli congruenti V F
e) se sono rettangoli e hanno un angolo acuto congruente V F

31 I lati del triangolo ABC misurano AB=8cm, AC=7,5cm e BC=5cm. A che distanza da B bisogna prendere sul lato BC un punto D in modo che la somma di DF parallelo a BA e DE parallelo a CA sia 7,8cm. *Individua i triangoli simili.* R. [DB=2cm]

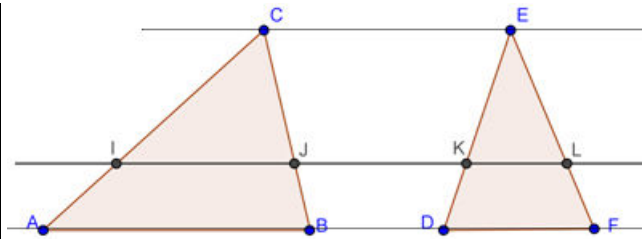
32 In un trapezio ABCD di basi AB=3cm e DC=7cm, traccia le diagonali AC e BD, indica con E il punto di intersezione delle diagonali. Da E traccia la parallela alle basi del trapezio e indica con F e G i punti di intersezione di questa parallela con i lati obliqui AD e BC. Determina la lunghezza di FG. (*ABE~DEC; AFE~ADC...*). [R. 4,2cm]

33 Dimostra che due triangoli sono simili se hanno le mediane che sono proporzionali.

34 Dimostra che congiungendo i punti medi di un triangolo equilatero si ottiene un triangolo equilatero simile.

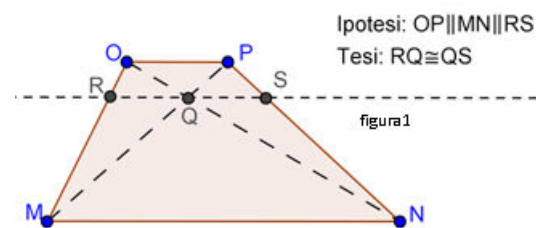
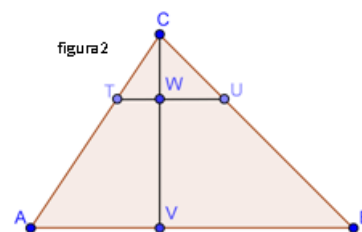
35 Nel trapezio ABCD rettangolo in A e in D, le diagonali BD e AC sono perpendicolari. Sapendo che AB=3cm, AD=4cm e BD=5cm, calcola la lunghezza della base maggiore DC. *Utilizza la similitudine dei triangoli ABD e ...* [R. 5,33 cm]

36 Il rapporto fra le basi di due triangoli isosceli è 2/5 e la somma delle loro aree è 435cm^2 ; sapendo che l'altezza relativa alla base del primo triangolo misura 10cm, calcolare i perimetri dei due triangoli.

37 Due triangoli ABC e DEF hanno le basi AB e DF e i vertici C ed E su rette parallele; dimostrate che IJ:KL=AB:DF dove IJ e KL sono le corde intercettate dai lati dei due triangoli su una retta parallela alle basi (*tracciate le altezze CP e EQ*).

38 Se in un trapezio il rapporto tra le basi è $\frac{2}{7}$ e l'altezza è di 18m, determinate la misura delle due parti in cui l'altezza risulta divisa dal punto di intersezione delle diagonali. Quanto dista dalla base minore il punto d'incontro dei lati obliqui del trapezio? R.[h_1=4m; h_2=14m; d=7,2m]

39 Il rapporto tra le aree dei due triangoli simili ABC e A'B'C' è $\frac{25}{9}$ e il perimetro di ABC è di 15m. Determinate il perimetro di A'B'C'.

40 In un triangolo rettangolo ABC i cateti AB ed AC misurano rispettivamente 15cm e 20cm. Si consideri la circonferenza con il centro sull'ipotenusa del triangolo e tangente ai due cateti e siano O e T rispettivamente il centro di tale circonferenza e il punto in cui essa tange AC. Calcolare l'area del triangolo TCO. (*Nel triangolo ABC, AO è la bisettrice ...*)

41 In base alla figura dimostrate quanto richiesto nella tesi date le ipotesi indicate.

42 Considerate la figura 2, basta sapere che VW=2CW per stabilire il rapporto di similitudine tra ABC e CTU? Se Area$_{(ABC)}$ = 54 rispetto al metro quadrato, quanto è l'area di CTU? Completate: "Il rapporto tra le due parti in cui ABC rimane diviso dal segmento TU è ………".

43 A che distanza dal vertice A di un triangolo deve essere posto un punto P sul lato AB di 12cm, in modo che la parallela condotta da P al lato BC determini un triangolo APR che sia i 9/16 del trapezio PRCB?

44 Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in C, il cateto AC è 3/4 del cateto BC. Da un punto D dell'ipotenusa si tracciano le parallele al cateti, il perimetro del rettangolo che si viene a formare è 11/6 del cateto BC. Individua il rapporto di ciascuno dei lati del rettangolo con il cateto BC. [R. 33/42; 44/21]

45 Dal punto medio M dell'ipotenusa BC di un triangolo rettangolo ABC traccia la perpendicolare all'ipotenusa che incontra il cateto AB in D. Determina il rapporto tra le aree dei triangoli DMB e ABC.

46 In una circonferenza di centro O e raggio di misura 30cm, è inscritto un triangolo ABC isoscele su base BC con la base che è i 2/3 della relativa altezza. Calcolare le misure dei lati di tale triangolo e il perimetro del triangolo BCD, essendo D la proiezione ortogonale di C sulla tangente in B alla circonferenza. (*Per rispondere alla seconda domanda tracciare l'altezza del triangolo ABC relativa ad AC e osservare la similitudine dei triangoli ...*).

47 * Dimostrare che, se due triangoli hanno i lati ordinatamente paralleli, allora sono simili.

48 * Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC, sia CD la bisettrice dell'angolo in C. Dal punto D si conduca la perpendicolare a CD che interseca l'ipotenusa BC in E. Si dimostri che il segmento CD è medio proporzionale fra isegmenti AC e CE.

49 * Sia ABCD un trapezio di base maggiore AB e base minore CD. Si dimostri che due dei quattro triangoli in cui le diagonali, incontrandosi, dividono il trapezio sono simili.

50 * Sia ABCD un trapezio di base maggiore AB e base minore CD, sia O il punto d'incontro delle diagonali AC e BD. Detto M il punto medio della base maggiore AB, si conduca la semiretta MO che incontra la base minore CD in N. Dimostrare che a) N è il punto medio di CD; b) O divide MN in parti proporzionali alle basi.

51 * In un triangolo qualunque ABC, siano M, N, P i punti medi rispettivamente di AB, BC e AC. Dimostrare che ABC e MNP sono simili.

52 * Dimostrare che due lati di un triangolo stanno tra loro come le proiezioni dell'uno sull'altro.

53 * Si dimostri che il diametro di una circonferenza inscritta in un trapezio isoscele è medio proporzionale tra le basi.

54 * Si dimostri che in due triangoli simili le mediane relative a lati omologhi sono proporzionali a tali lati.

55 * Disegnare un triangolo rettangolo ABC, retto in A. Tracciare la bisettrice CP di B b CA. Dal punto P condurre la perpendicolare a CP che incontra l'ipotenusa BC nel punto H. Dimostrare che il segmento CP è medio proporzionale tra i segmenti CA e CH.

56 * Disegnare due triangoli rettangoli ABC e ABD con i vertici C e D da parti opposte rispetto all'ipotenusa comune AB. Prolungare i lati AC e DB fino a incontrarsi nel punto E. Dimostrare che EA:ED=EB:EC.

57 * Considerare due circonferenze che s'incontrano nei punti A e B e un punto E sulla retta AB esterno al segmento AB. Dal punto E tracciare le tangenti alle due circonferenze. Dimostrare che i segmenti di tangenza sono tutti congruenti.

58 Sia ABC un triangolo acutangolo; sia O il suo circocentro e siano P e Q i punti (diversi da A)in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC.

a)Dimostrare che gli angoli BAP e QAC sono congruenti;

b)Dimostrare che i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;

c)Dimostrare che, detti M e N i punti medi di AB e AC, l'area del quadrilatero ABPC vale quattro volte l'area del quadrilatero AMON.

(*Olimpiadi della Matematica Gara di II livello febbraio 2012*)

59 Sia ABC un triangolo e sia A' il simmetrico di A rispetto a BC; sia poi DAA' simile ad ABC e sia D' il simmetrico di D rispetto ad AA'. Sapendo che il prodotto delle aree dei quadrilateri ABA'C e ADA'D' è 16, la misura di AA' è :

a) 1 b) $2\sqrt[4]{2}$ c) 2 d) $2\sqrt{2}$

e) non è univocamente determinata dai dati

(Nota: la similitudine tra DAA' e ABC va intesa in modo ordinato: DA : AB = AA':BC=A'D:CA)

(*Olimpiadi della Matematica, gara di II livello, febbraio 2006*)

60 In un triangolo isoscele ABC, con AC = BC ≠ AB, si fissi un punto P sulla base AB. Quante posizioni può assumere nel piano un punto Q se vogliamo che i punti A, P e Q , presi in ordine qualsiasi, siano i vertici di un triangolo simile ad ABC ?

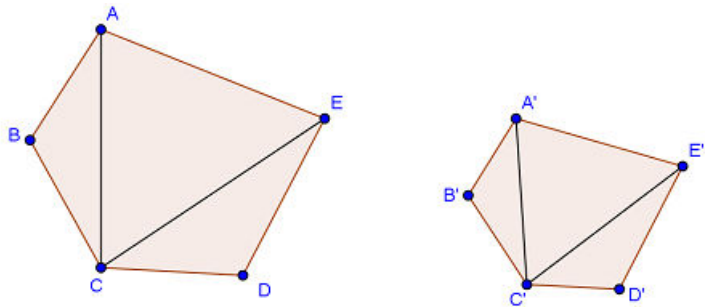
a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(*Olimpiadi della Matematica, gara di II livello, febbraio 2007*)

Gli esercizi contrassegnati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pag. 179, licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

►4. Similitudine tra poligoni

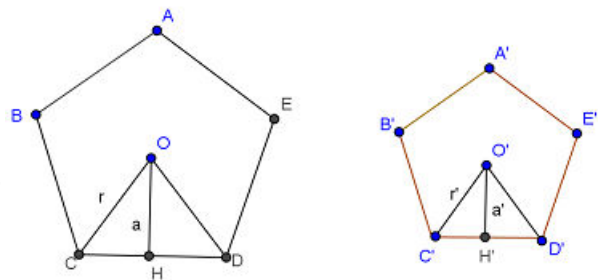
TEOREMA. **Dati due poligoni simili, le diagonali uscenti da uno stesso vertice li decompongono in triangoli ordinatamente simili.**

Ipotesi : ABCDE ~ A'B'C'D'E'
Tesi : ABC~A'B'C'; ACE~A'C'E'; ECD~E'C'D'
Dimostrazione :
Ricordiamo che due poligoni si dicono simili se hanno tutti gli angoli congruenti e tutti i lati ordinatamente in proporzione. Consideriamo, ad esempio, i due pentagoni simili della figura; tracciamo le diagonali CE, CA e le corrispondenti C'E', C'A'. Confrontiamo i triangoli ABC e A'B'C' ; sono simili per il secondo criterio in quanto hanno due lati in proporzione: AB : A'B' = BC : B'C' e l'angolo in B congruente. Possiamo quindi scrivere la proporzione tra i lati omologhi AB : A'B' = AC : A'C' e dedurre che $B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C'$. Dalla similitudine dei due poligoni deduciamo che $C\hat{A}E \cong C'\hat{A}'E'$ perché differenze di angoli congruenti, e dalla proporzione AB:A'B'=AE:A'E', confrontata con la precedente, deduciamo la proporzione AC:A'C'=AE:A'E'. Consideriamo a questo punto i triangoli ACE e A'C'E' ; anch'essi sono simili per il secondo criterio. Ragionando in modo analogo si dimostra la similitudine dell'ultima coppia di triangoli.

Similitudine tra poligoni regolari

Ricordiamo che un poligono si definisce regolare quando ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti (ricordiamo che la somma degli angoli interni di un poligono qualsiasi è pari a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due). Sono poligoni regolari il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono regolare, l'esagono regolare, … Pertanto, affinché due poligoni regolari siano simili è sufficiente che abbiano lo stesso numero di lati. Difatti, due poligoni regolari con lo stesso numero di lati avranno tutti gli angoli congruenti tra loro ed i lati in proporzione, in quanto il rapporto tra due lati omologhi qualsiasi sarà sempre lo stesso.

TEOREMA. **I perimetri di due poligoni regolari dello stesso numero di lati stanno tra loro come i rispettivi raggi e come i rispettivi apotemi.**

Ricordiamo che si chiama raggio di un poligono il raggio della circonferenza circoscritta al poligono, e che si chiama apotema il raggio della circonferenza inscritta. Poiché è sempre possibile in un poligono regolare inscrivere una circonferenza e circoscriverne un'altra (vedi i teoremi dimsotrati nel capitolo sulla circonferenza), questo teorema vale per tutti i poligoni regolari dello stesso numero di lati, e quindi simili.
Consideriamo ad esempio due pentagoni regolari: ABCDE e A'B'C'D'E'
Ipotesi :
ABCDE ~ A'B'C'D'E'
Tesi :
2p : 2p' = r : r'
2p ; 2p' = a : a'
dove r ed r' sono i raggi, a e a' gli apotemi.
Dimostrazione : Innanzitutto ricordiamo che in due poligoni simili i perimetri stanno tra loro come due lati omologhi, quindi avremo ad esempio che
(*)   2p : 2p' = CD : C'D'
Congiungiamo il centro O della circonferenza (sia di quella inscritta sia di quella circoscritta) con i due vertici C e D , e congiungiamo O' con i vertici C' e D'. I triangoli isosceli COD e C'O'D' sono simili, in quanto l'angolo in O è congruente all'angolo in O' (entrambi sono un quinto dell'angolo giro) e gli angoli alla base congruenti perché ciascuno è metà di angoli congruenti, quindi sono simili per il primo criterio di similitudine.

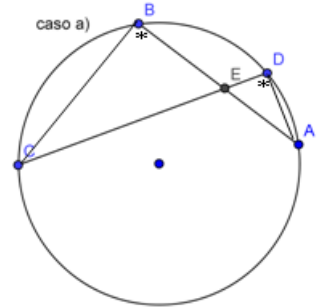
Possiamo allora scrivere la proporzione CD : C'D' = CO : C'O'.
Poiché CO = r e C'O' = r'; tenendo presente la (*) ed applicando la proprietà transitiva dell'uguaglianza possiamo dunque scrivere : 2p : 2p' = r : r'. Abbiamo così dimostrato che i perimetri dei due poligoni stanno tra loro come i rispettivi raggi.

Ora applichiamo ai due triangoli simili COD e C'O'D' il teorema secondo cui in due triangoli simili le altezze sono proporzionali alle rispettive basi OH : O'H' = CD : C'D'. Applicando anche questa volta la proprietà transitiva della congruenza e ponendo OH = a , O'H' =a', avremo 2p : 2p' = a : a'.
Quindi i perimetri dei due poligoni stanno tra loro come i rispettivi apotemi■

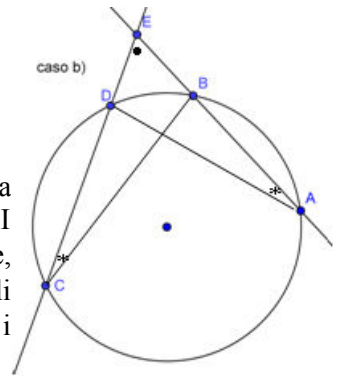
Il lettore dimostri da solo, ricorrendo ai teoremi precedenti, che **due poligoni regolari dello stesso numero di lati stanno tra loro come i quadrati costruiti sui rispettivi raggi ed apotemi**.

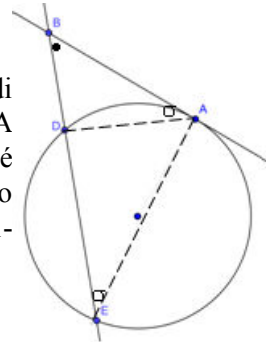
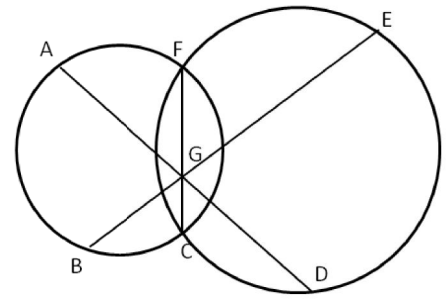
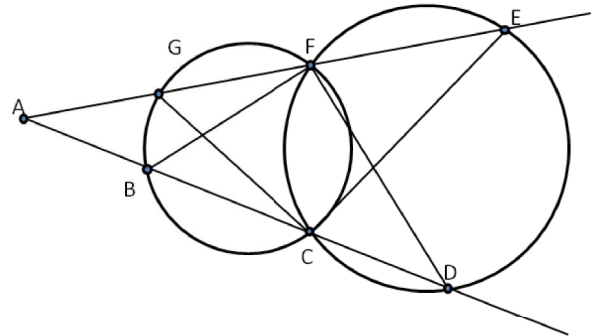
►5. Proprietà di secanti e tangenti ad una circonferenza

Osserviamo che in una circonferenza, due corde possono intersecarsi internamente al cerchio o esternamente.

TEOREMA DELLE CORDE. **Se due corde di una circonferenza si incontrano in un punto interno al cerchio allora le due corde restano divise in modo che le parti di una siano i medi e le parti dell'altra gli estremi della stessa proporzione.**

Ipotesi
AB e CD sono due corde che si intersecano in E.
Tesi
EB:ED=EC:EA
Dimostrazione
Dovendo arrivare ad una proporzione tra segmenti, cercheremo di individuare la similitudine tra due triangoli; a questo scopo congiungiamo B con C e A con D e consideriamo i triangoli …... ed …… Essi hanno: ……≅…… perché opposti al vertice; $C\hat{B}A \cong C\hat{D}A$ perché insistono … … … Dunque risultano simili per il primo criterio di similitudine. Quindi individuati i lati omologhi possiamo scrivere la proporzione BC:DA=EB:ED=EC:EA■

TEOREMA DELLE SECANTI. **Se da un punto esterno a un cerchio si conducono due secanti alla circonferenza, allora un'intera secante e la sua parte esterna formano i medi e l'altra secante e la sua parte esterna sono gli estremi di una stessa proporzione.**

Ipotesi
AB e CD sono due corde che si intersecano in E esterno alla circonferenza.
Tesi
EC:ED=EA:EB
Dimostrazione
Dovendo determinare una proporzione tra segmenti, cercheremo di individuare la similitudine tra due triangoli; a questo scopo congiungiamo B con C e A con D. I triangoli EBC ed EAD sono simili perché hanno: $B\hat{E}C = D\hat{E}A$ in comune, $B\hat{C}E = D\hat{A}E$ perché insistono sullo stesso arco DB. Risultano quindi simili per il primo criterio di similitudine. Possiamo allora scrivere la proporzione tra i lati EC:ED=EA:EB■

TEOREMA DELLA SECANTE E DELLA TANGENTE. **Se da un punto esterno a un cerchio si conduce una secante e una tangente alla circonferenza, allora il segmento di tangente è medio proporzionale tra l'intera secante e la sua parte esterna alla circonferenza.**

Ipotesi : B punto esterno alla circonferenza, BA tangente in A, BE secante in D e E.
Tesi : BE:BA=BA:BD
Dimostrazione : Dovendo determinare una proporzione tra segmenti, cercheremo di individuare la similitudine tra due triangoli; a questo scopo congiungiamo A con E e A con D e consideriamo i triangoli EBA e DBA. Essi hanno $E\hat{B}A \cong D\hat{B}A$ perché coincidenti; $B\hat{E}A \cong D\hat{B}A$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC. I due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine. Individuati i lati omologhi si può scrivere la proporzione BE: BA=BA:BD■

61 Nella seguente figura, applicando il teorema delle corde, individua tutte le possibili relazioni di proporzionalità tra i segmenti.

62 Individua tutte le possibili relazioni di proporzionalità tra i segmenti della figura, applicando il teorema delle corde.

63 Siano A, B, C, D quattro punti di una circonferenza, presi nell'ordine indicato. Sia E il punto di intersezione di AC con BD. Dimostra che sono simili i triangoli AEB e DEC.

64 Dato un angolo acuto di vertice A e lati le semirette r, s, traccia un punto M interno all'angolo. Da M traccia la perpendicolare a r che incontra la retta r in B e la s in C. Sempre da M traccia la perpendicolare a s che incontra la retta s in D e la retta r in E. Dimostra che i punti B, D, C, E sono su una stessa circonferenza.

65 Sia ABC un triangolo circoscritto a una circonferenza γ, sia D il punto di tangenza del lat AB ed E il punto di tangenza del lato AC. Sia F il punto di intersezione della secante BE con la circonferenza. Dimostra che sono simili itriangoli DBF e BDE. *Applica il teorema della secante e della tangente.*

66 In una circonferenza di centro O, due corde AB e CD si incontrano in un punto P. Sapendo che $\overline{PO}=2\text{cm}$ e che $\overline{AP}\cdot\overline{PB}=14{,}02\,cm^2$, calcola il raggio della circonferenza. [R. 4,24cm]

67 Una corda AB di una circonferenza misura 3cm. Dal punto medio M della corda passa un'altra corda della stessa circonferenza, tale che MD=CM+2cm. Determina la lunghezza della corda CD. [R.3,6cm]

68* Siano AB e CD due corde di una circonferenza che s'incontrano nel punto E tale che AE:EB=CE:ED. Dimostrare che le due corde sono congruenti.

69* Si consideri un quadrilatero ABCD inscritto in una circonferenza e sia Q il punto d'incontro delle diagonali. Dimostrare che ABQ è simile a CDQ e che BCQ è simile a ADQ.

70* Sia ABC un triangolo con l'angolo in A acuto. Considerata la circonferenza di diametro BC, siano D ed E le intersezioni della circonferenza rispettivamente con i lati AB ed AC. Dimostrare che AED è simile a ABC.

71* Da un punto G esterno ad una circonferenza si conducano la tangente GA e la secante che interseca la circonferenza in B e C, con GC < GB. Si prolunghi il segmento di secante GB di un segmento $BD\cong GC$ e da D si conduca la tangente in E alla circonferenza. Dimostrare che $GA\cong DE$.

72* Sia AB un segmento qualunque. Da B si conduca la retta p perpendecilare ad AB e su di essa si costruisca il punto O tale $2BO\cong AB$, quindi si descriva la circonferenza di centro O e raggio OB. Dall'estremo A si conduca la semiretta a che interseca la circonferenza nei punti D ed E, con D più vicino ad A; si descriva infine la circonferenza di centro A e raggio AD che interseca il segmento AB in C. Dimostrare che AC è medio proporzionale tra tutto il segmento AB e la parte restante CD.

73* Disegna due triangoli rettangoli ABC e ABD con i vertici C e D da parti opposte rispetto all'ipotenusa comune AB. Sia E il punto d'incontro delle rette AC e BD. Dimostra che $DE\cdot BE=CE\cdot AE$.

74 E' data una circonferenza di diametro AB e centro O. Sia C un punto della circonferenza (diverso da A e da B), e si tracci la retta r parallela ad AC per O. Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB. Dimostrare che DO è bisettrice dell'angolo CDB e che il triangolo CDB è simile al triangolo AOD. (questa similitudine è dimostrabile in due modi…) (*Olimpiadi della Matematica, gara di II livello, febbraio 2007*)

►6. La sezione aurea

DEFINIZIONE. La sezione aurea di un segmento AB è quella parte AC del segmento media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente CB.

In riferimento alla figura si ha AB : AC = AC : CB

Il punto di vista algebrico

Dato un qualunque segmento AB di misura *a*, è sempre possibile determinare su di esso il punto C tale che valga la proporzione AB : AC = AC : CB?

Soluzione

Lasciamo al lettore il completamento del ragionamento:

Poniamo $\overline{AC}=x \Rightarrow \overline{CB}=a-x$ e riscriviamo la proporzione passando alle misure ………………

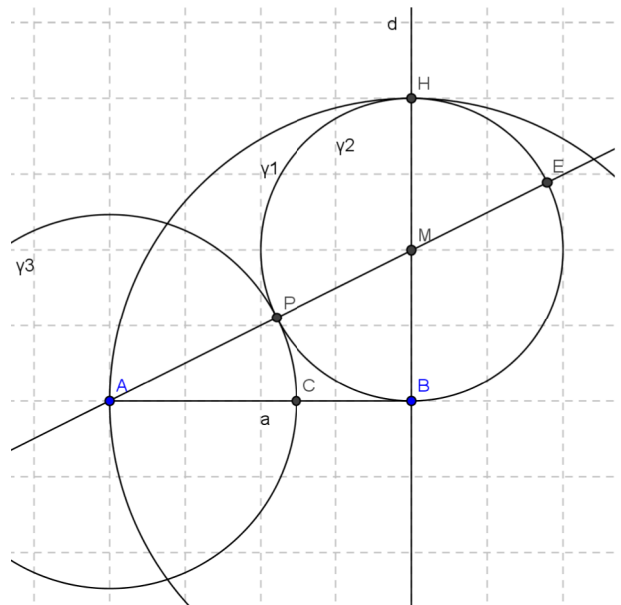
Per la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche si ottiene……………… da cui sviluppando i calcoli si ha l'equazione di secondo grado in x ……………………………… che ha il discriminante …………………… positivo per qualunque a>0. Quindi l'equazione ammette due soluzioni.

Si hanno quindi due punti C e C' che individuano la sezione aurea? Prima di rispondere alla domanda, calcolate le soluzioni dell'equazione precedente: x_1 = … … … ; x_2 = … … ….

Il punto di vista geometrico

Possiamo determinare la sezione aurea di un segmento con una costruzione geometrica? La risposta è positiva. La costruzione che riportiamo è quella di Eulero; essa sfrutta il teorema della tangente e della secante.

Eseguite tale costruzione attraverso i passi sotto descritti (potete anche usare un software di geometria dinamica come Geogebra):

1. disegna un segmento AB;
2. tracciate la retta p, perpendicolare ad AB e passante per B;
3. disegnate la circonferenza γ_1 di centro B e raggio AB;
4. chiamate H uno dei punti di intersezione della retta p con γ_1;
5. chiamate M il punto medio di BH;
6. disegnate la circonferenza γ_2 di centro M e raggio MB;
7. tracciate la retta AM;
8. intersecate la retta AM con la circonferenza γ_2; chiamate P il punto di intersezione più vicino ad A ed E quello più lontano;
9. tracciate la circonferenza γ_3 di centro A e raggio AP;
10. chiamate C il punto d'intersezione di γ_3 con AB.

Il segmento AC è la sezione aurea del segmento AB.

Completate ora la dimostrazione della affermazione conclusiva:

Ipotesi: … … … … … … … … … … … … … …   Tesi: …………………

Dimostrazione: Per costruzione risulta AB tangente a γ_2 e AE secante, quindi per il teorema della tangente e della secante si ha: AE : … = … : AP; per la proprietà dello scomporre delle proporzioni si ha:

$$(AE-AB):AB=(AB-AP):AP$$

Per costruzione si sa che: AB=HB=PE e quindi AE – AB = … ... – … … = … …

Dal momento che AP = AC si ottiene AB – AP = … … – … … = … …

Sostituendo nella proporzione (AE-AB):AB=(AB-AP):AP si ottiene la proporzione … : … = … : …

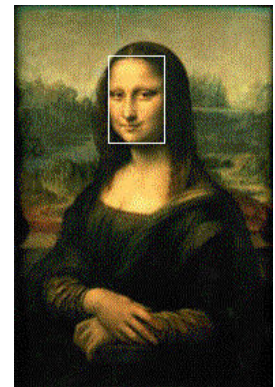
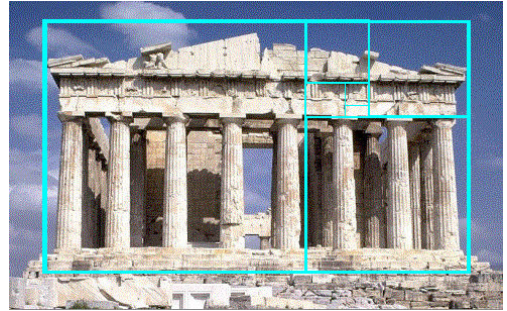
E infine applicando la proprietà dell'invertire si ottiene la tesi AB : AC = AC : CB■

75 Assegnato un segmento AB, costruite il rettangolo avente per lati la sezione aurea del segmento e la diagonale del quadrato avente AB come lato.

76 Un rettangolo ABCD ha il lato AD che è la sezione aurea del lato AB; verificate che, dopo aver costruito all'interno del rettangolo il quadrato AEFD di lato AD (E su AB e F su DC), il segmento EB è sezione aurea di AD. Costruite ora entro EBCF il quadrato di lato EB e verificate che il rettangolo che rimane ha il lato minore che è sezione aurea del lato maggiore. Potete affermare che tutti i rettangoli che via via si possono costruire sono tra loro simili? Calcolate il valore esatto del rapporto aureo, supponendo unitaria la misura del lato AB del rettangolo aureo descritto nell'esercizio precedente: $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{...}\approx 1,...$

Il rettangolo dell'esercizio precedente viene chiamato **rettangolo aureo** in quanto risulterebbe, tra gli infiniti rettangoli che si possono disegnare quello che dà la maggiore soddisfazione visiva; il rapporto tra AB e AD viene chiamato **numero aureo**.

Negli oggetti quotidiani possiamo trovare alcuni esempi di rettangolo aureo: le schede telefoniche, le carte di credito e bancomat, le carte SIM dei cellulari sono tutti rettangoli aurei.

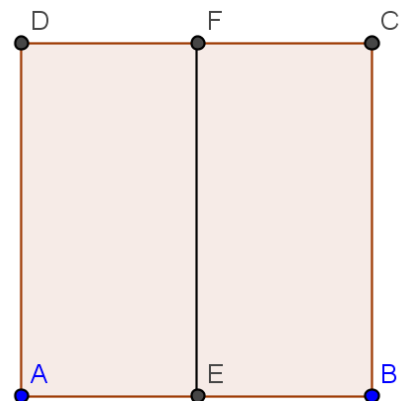
Ritroviamo il rettangolo aureo anche in opere architettoniche e pittoriche: il grande scultore greco Fidia collaborando alla costruzione del Partenone seguì il rapporto aureo; il viso della Gioconda di Leonardo può essere racchiuso in un rettangolo aureo; nella "Parade", opera del pittore francese Seurat, vari punti delimitano rettangoli aurei; "Place de la Concorde", un'astrazione lineare di Piet Mondrian, è costituita da rettangoli aurei che si sovrappongono.

77 Il numero aureo è solitamente indicato con la lettera greca "φ"; esso è un numero irrazionale con alcune caratteristiche: se considerate l'approssimazione $\varphi=1,618033989\ldots$ e determinate φ^2 e $1/\varphi$ potete notare che … … … … … … … … …

78 Dimostrate che nel triangolo isoscele ABC di base BC e con angolo al vertice di 108°, il lato è la sezione aurea della base. (*Tracciate una semiretta di origine A che spezzi l'angolo in due parti di cui una doppia dell'altra…*).

79 Dimostrate che il lato del pentagono regolare è la sezione aurea della diagonale.

80 Dal quadrato ABCD in figura, costruiamo un rettangolo aureo.

1. Congiungete i punti medi E ed F rispettivamente dei lati AB e CD.
2. Con centro in E descrivete l'arco di circonferenza di raggio EC che interseca in G il prolungamento di AB (dalla parte di B). 3. Da G innalzate la perpendicolare ad AG che interseca in H il prolungamento del lato DC. Il rettangolo AGHD è un rettangolo aureo. Infatti l'arco di circonferenza passa anche per il vertice D; H è un punto esterno da cui esce la secante …… e il segmento di tangente … …

Si ha la proporzione: … … … … … … … .
da cui si deduce la suddetta conclusione.

TEOREMA. Il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta.

Detto OA il raggio della circonferenza e AB il lato del decagono regolare, si deve dimostrare che: OA:AB=AB:(OA-AB)

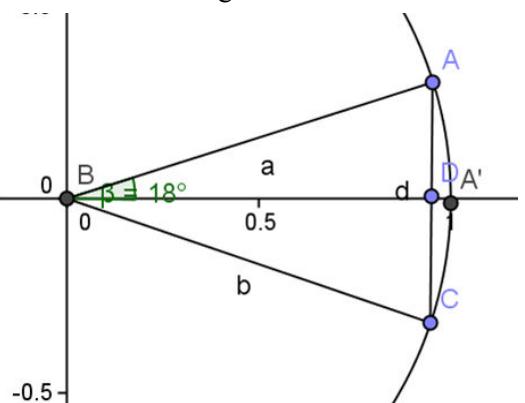
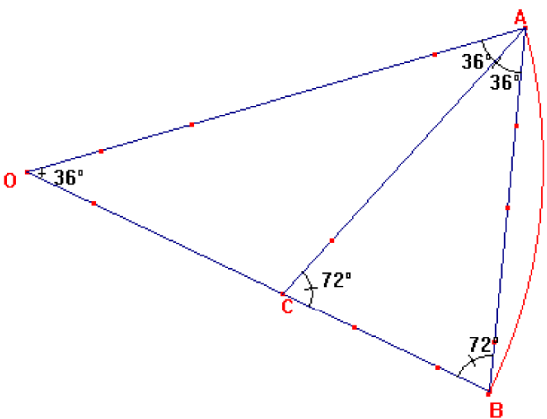
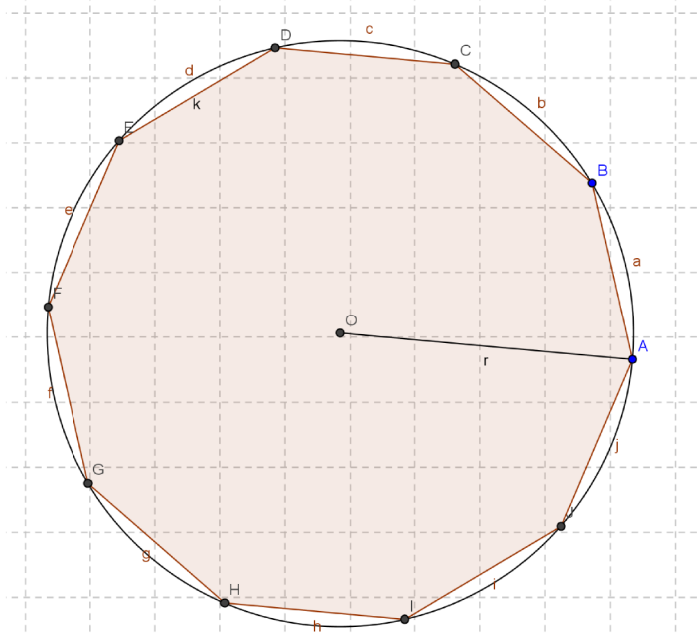
Dimostrazione :
Quando si congiungono i vertici di un poligono regolare con il centro della circonferenza (inscritta o circoscritta) si ottengono tanti triangoli isosceli quanti sono i lati, e questi triangoli sono tutti congruenti tra loro.
Consideriamo, per il decagono regolare, uno solo di questi triangoli, per esempio AOB. L'angolo in O vale 36° (infatti è un decimo dell'angolo giro), quindi gli angoli alla base varranno ciascuno 72°.

Tracciamo la bisettrice AC del triangolo AOB. Si ottiene il triangolo AOC, che è isoscele in quanto ha due angoli di 36°, ed il triangolo ACB, anch'esso isoscele poichè ha due angoli di 72° (l'angolo in B e l'angolo $A\hat{C}B$).
Quindi avremo AC=OC=AB.

I triangoli AOB e ACB inoltre sono simili, in quanto hanno gli angoli rispettivamente congruenti.
Allora si può scrivere la proporzione OA:AB=AB:CB dove il primo AB è il lato del triangolo ACB e il secondo AB è la base di AOB.
Abbiamo così dimostrato il teorema, in quanto CB è congruente a OB-OC = OA-AB (OA=OB perchè raggi, OC=AB per quanto prima dimostrato).

Sostituendo alle grandezze le loro misure, chiamando ad esempio r il raggio ed l il lato, la proporzione diventa:
$r:l=l:(r-l)$
moltiplichiamo tra loro gli estremi ed i medi
$l^2=r^2-r\cdot l \rightarrow l^2+r\cdot l-r^2=0$

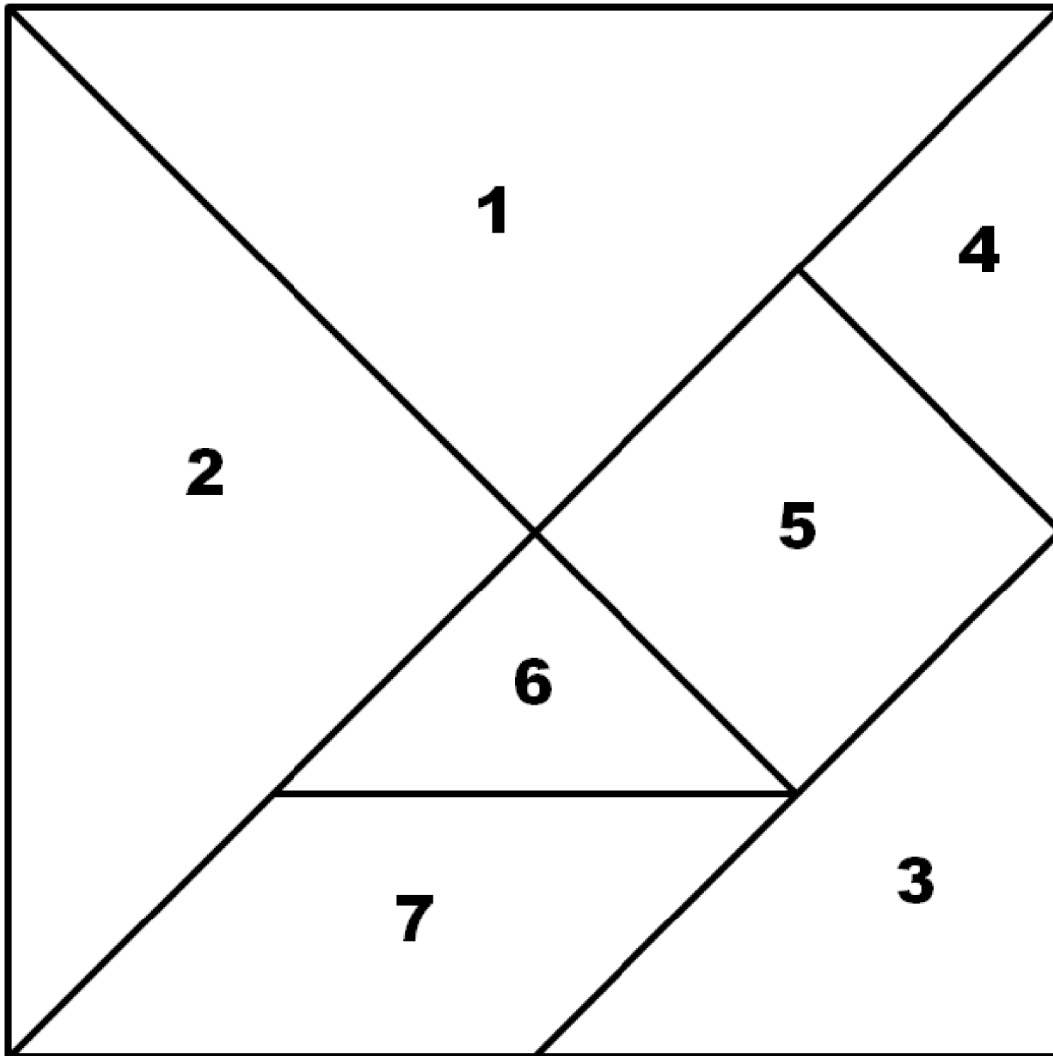
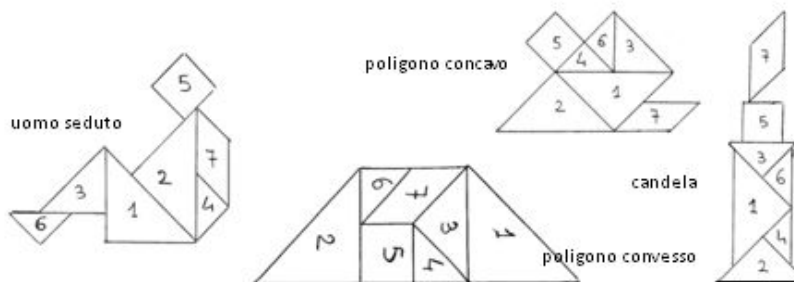
Risolvendo l'equazione rispetto ad l ottengo $l=\frac{-r\pm r\sqrt{5}}{2}$, tenendo conto che è accettabile solo la lunghezza positiva si ha $l=r\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Una importante applicazione di questo teorema è il calcolo del valore del seno dell'angolo di 18°.
Considerando la circonferenza goniometrica, se poniamo l'angolo di 36° col vertice nell'origine degli assi, questo verrà dimezzato dall'asse x, e di conseguenza verrà dimezzato anche il lato opposto (abbiamo infatti un triangolo isoscele in cui la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana relativa alla base).
Il seno di 18° corrisponde alla lunghezza di AD, che è quindi metà del lato del decagono regolare, perciò vale $sen\,18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, in quanto $r = 1$.

MATEMATICA C3 - GEOMETRIA
8. EQUIESTENSIONE E AREE

Window geometry di midori.no.kerochan
http://www.flickr.com/photos/28661972@N05/2751042868/

Indice

►1. Estensione superficiale

Il Tangram è un antichissimo gioco cinese; il nome con cui lo conosciamo si pensa derivato dall'unione della parola "tang" o "tan", che significa "cinese", e "gram" che significa "immagine". Anticamente in Cina era chiamato “schema intelligente a sette pezzi" o anche "le sette pietre della saggezza" poiché si riteneva che la padronanza del gioco fosse la chiave per ottenere saggezza e talento.
Il gioco è costituito da un quadrato ritagliato in 7 pezzi poligonali aventi in comune solo punti del loro contorno (come mostra la figura sottostante).

I pezzi possono essere disposti e accostati gli uni agli altri senza sovrapposizioni in modo da ottenere una grande varietà di figure; la regola base è che devono essere utilizzati tutti i 7 pezzi. Si possono così formare alcuni disegni come mostrato nelle seguenti figure.
Potete osservare che si forma un poligono quando i singoli pezzi vengono accostati mediante un lato: l'uomo seduto è un poligono, ma non la candela; i due poligoni rappresentati sono l’uno concavo e l’altro convesso.

1 Con tutti i 7 pezzi del gioco si possono costruire 13 poligoni convessi, compreso il quadrato iniziale, provate a costruirli: fotocopiate la pagina precedente e ritagliate i 7 pezzi del Tangram.

Evidentemente i 13 poligoni che avrete costruito non sono congruenti, né hanno la stessa forma; potete dire che sono formati dalle stesse parti poligonali, ciascuno può cioè essere pensato come unione dei "tan" aventi in comune almeno un punto del loro perimetro, ma nessun punto interno.

DEFINIZIONI.

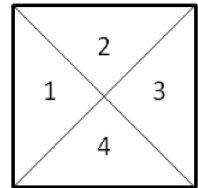
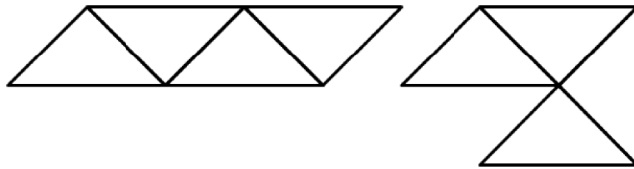
Per **somma di due figure piane** X e Y, non aventi punti comuni o aventi in comune solo punti del loro contorno, intendiamo la figura Z unione dei punti di X e Y e la indicheremo con X+Y. Inoltre se Z è la somma delle due figure X e Y allora diremo che X è la **differenza** tra Z e Y e scriveremo X=Z-Y.

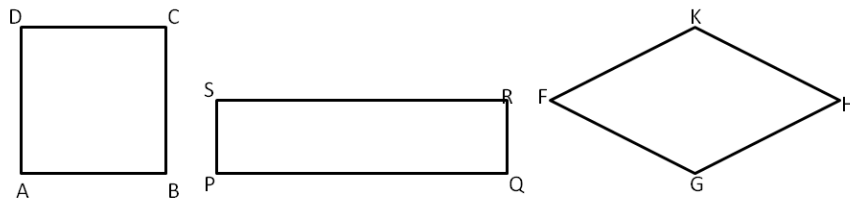
Due poligoni sono **equicomposti** se sono formati dalle stesse parti poligonali.

Due poligoni sono **equiscomponibili** se è possibile decomporre uno di essi in un numero finito di parti poligonali con le quali si possa ricoprire l'altro.

Tutte le figure poligonali costruite con i pezzi del Tangram sono dunque poligoni equicomposti, ma possono anche essere considerati poligoni equiscomponibili: tale caratteristica si esprime in simboli scrivendo:

$p_1 \doteq p_2 \doteq \ldots$ e si legge "p1 equicomposto p2 …"

2 Ritagliate da un quadrato i quattro triangoli rettangoli isosceli che si ottengono tracciando le sue diagonali. Disponendo fianco a fianco i triangoli ottenuti in modo che i due lati comuni abbiano la stessa lunghezza, si ottengono 14 figure diverse. Due di esse sono riportate nella figura. Realizzate tutte le altre figure.

Le figure ottenute sono … … … … perché sono formate da … … … …

(*Da Prova di allenamento della gara Matematica senza frontiere del 9/02/1994*)

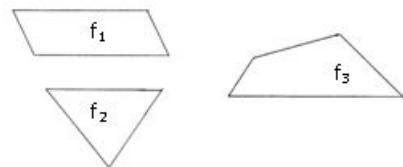
3 Nella figura sono disegnati un quadrato ABCD, un rettangolo PQRS avente PQ=2AB e SP=AB/2 e un rombo FGHK avente una diagonale uguale al lato del quadrato e l'altra il doppio. Mostrate come sia possibile scomporre ciascuno dei tre poligoni in parti tali da poter ricoprire gli altri due. Puoi concludere che i tre poligoni assegnati sono equiscomponibili?" ……..

4 Dato l'insieme F = {f1, f2, f3} delle figure poligonali disegnate a lato, seguite le seguenti istruzioni:

ripeti

scegli una figura dell'insieme F

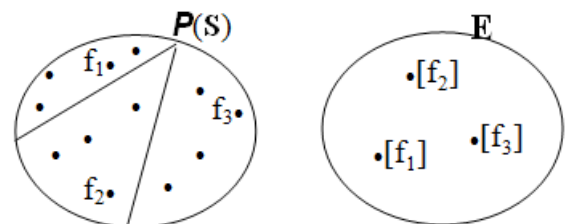
traccia alcuni segmenti che la decompongano in parti poligonali

forma con le parti ottenute altre 3 figure poligonali

finchè hai esaurito le figure.

Costruite l'insieme G di tutti i poligoni ottenuti con questa procedura e indicate con simboli arbitrari i suoi elementi.

Nell'insieme $S=F\cup G$ la relazione ***R*** espressa dal predicato: "essere equicomposti" gode della

- proprietà riflessiva infatti … … … … … … … … … … … …
- proprietà simmetrica infatti … … … … … … … … … … …
- proprietà transitiva infatti … … … … … … … … … … … …

Si può dunque concludere che la relazione ***R*** è una relazione d'equivalenza; si possono quindi costruire sia l'insieme delle

parti P(S) dell'insieme S sia l'insieme quoziente E=S/R avente come elementi le tre classi d'equivalenza, ciascuna rappresentata dal poligono iniziale:
[f1] = {x: x è un poligono equicomposto con f1};
[f2] = {x: x è un poligono equicomposto con f2};
[f3] = {x: x è un poligono equicomposto con f3}.

DEFINIZIONE. Diciamo che i poligoni appartenenti alla stessa classe sono **equivalenti** e useremo il simbolo $p_1 \doteq p_2$ per esprimere questa caratteristica (equivalenza per scomposizione); essi hanno una caratteristica comune che chiamiamo **estensione superficiale** (ES).

I poligoni costruiti con i pezzi del Tangram appartengono alla stessa classe d'equivalenza; essi sono dunque poligoni equivalenti e hanno la stessa estensione superficiale del quadrato da cui inizia il gioco.
Anche i 14 poligoni realizzati nell'esercizio 2 appartengono alla stessa classe d'equivalenza; essi sono dunque poligoni equivalenti e hanno la stessa estensione superficiale del quadrato assegnato.

Osservazione
Sin dalla scuola elementare avete usato termini come superficie, estensione, area quando vi siete accostati allo studio dei poligoni, probabilmente ritenendoli sinonimi. Lo studio di una particolare relazione di equivalenza vi ha mostrato che il concetto di estensione di un poligono si ottiene attraverso il procedimento di passaggio al quoziente nell'insieme dei poligoni piani

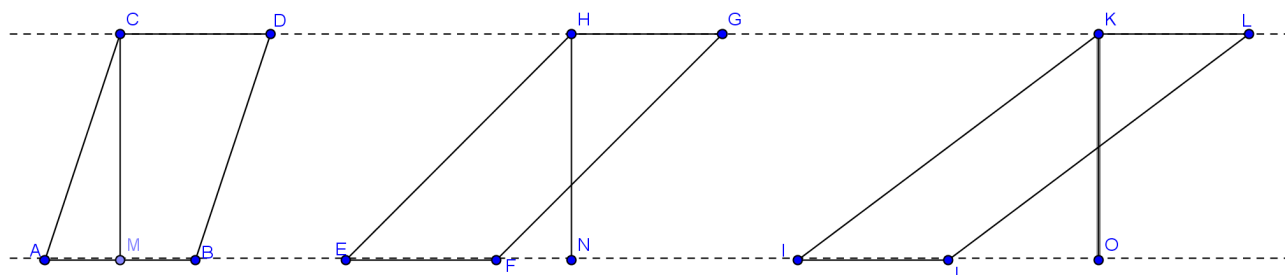
DEFINIZIONE. Chiamiamo **area di un poligono** il numero reale positivo A che esprime la misura dell'estensione superficiale.

Possiamo concludere che ad ogni classe d'equivalenza, generata con la relazione "essere equicomposti" o "essere equiscomponibili", può essere associato un numero: l'area della figura scelta come rappresentante della classe d'equivalenza. In tal modo trasformeremo una relazione di equivalenza tra poligoni, espressa con il simbolo $\doteq$ in una relazione di uguaglianza tra numeri.
Ad esempio, riferendoci ai poligoni costruiti con i pezzi del Tangram possiamo trasformare la relazione d'equivalenza $p_1 \doteq p_2 \doteq p_3 \doteq \ldots$ in una uguaglianza tra le aree scrivendo $A(p_1) = A(p_2) = A(p_3) = \ldots$.

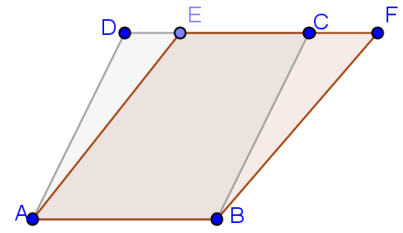
►2. Poligoni equivalenti

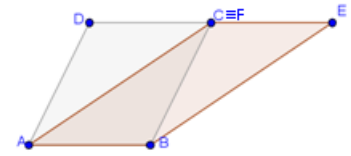
Premettiamo alcuni assiomi:
Assioma 1. Poligoni congruenti sono equivalenti.
Assioma 2. Un poligono non è equivalente ad una sua parte propria.
Assioma 3. Somma e differenza di poligoni equivalenti originano poligoni equivalenti.

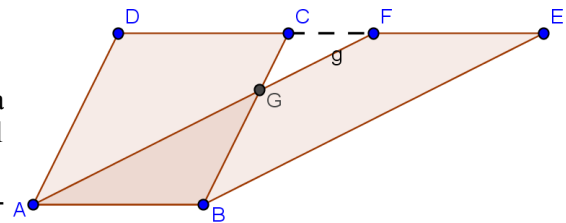
TEOREMA 1. **Due parallelogrammi aventi rispettivamente congruenti le basi e le rispettive altezze, sono equivalenti.**

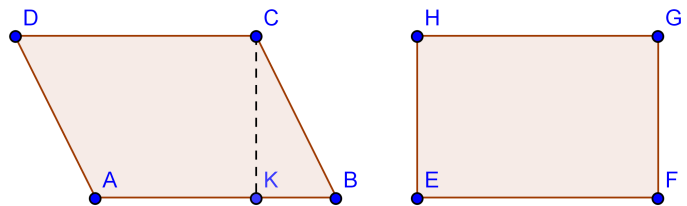
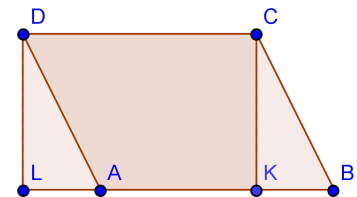
Nella figura sottostante sono rappresentati alcuni degli infiniti parallelogrammi aventi basi e altezze congruenti; le loro basi appartengono a rette parallele.
Ipotesi: $AB \cong EF \cong IJ$; $CM \perp AB$, $HN \perp EF$, $KO \perp IJ$, $CM \cong HN \cong KO$.
Tesi: $ABCD \doteq EFGH \doteq IJLK$
Dimostrazione:

Per dimostrare l'equivalenza tra questi parallelogrammi, costruiamo su ABCD un altro parallelogrammo, facendo sovrapporre le loro basi. Avremo tre casi:

<u>Primo caso</u>

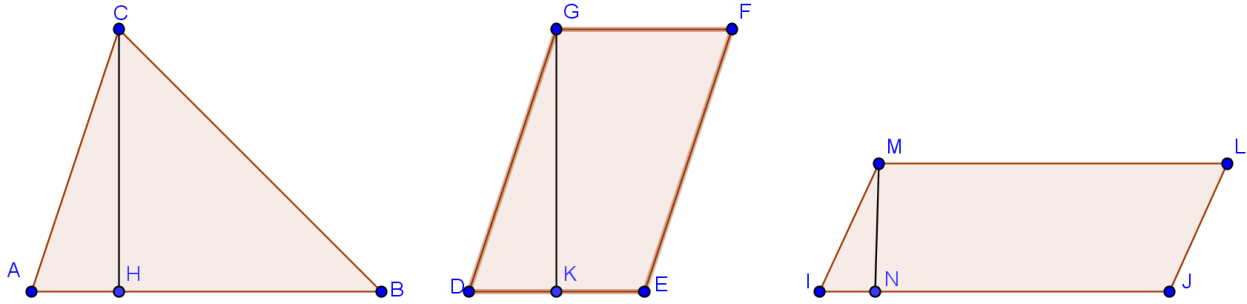
Costruiamo su ABCD il parallelogrammo ABFE avente la stessa base AB e stessa altezza; il vertice E è un punto interno a DC. ABCD è scomposto in ADE + ABCE; ABFE è scomposto in BCF + ABCE. Se dimostriamo la congruenza dei triangoli ADE e CBF potremo concludere che i due parallelogrammi essendo equicomposti sono equivalenti.
Consideriamo i due triangoli ADE e CBF, essi sono congruenti per il terzo criterio di congruenza, infatti: $AD \cong CB$ perché lati opposti del parallelogramma ABCD; $AE \cong BF$ perché lati opposti del parallelogramma ABFE; $DE \cong CF$ perché differenza di segmenti congruenti, precisamente DE=DC-EC e CF=EF-EC.
Dalla congruenza dei triangoli segue anche la loro equivalenza $ADE \cong CBF \rightarrow ADE \doteq CBF$. Possiamo allora concludere che $ABCD \doteq ABFE$.

<u>Secondo caso</u>

Completate voi la dimostrazione.
Costruiamo su ABCD il parallelogrammo ABEF avente la stessa base AB e stessa altezza; il vertice C coincide con F e ABCD è scomposto in ADC + ACB; ABEF è scomposto in … … … … … … Se dimostriamo la congruenza dei triangoli ADC e CBE potremo concludere che i due parallelogrammi essendo equicomposti sono equivalenti. Infatti, ADC e CBE hanno $AD \cong CB$ perché …
concludiamo: … … … … … … … … … … … …

<u>Terzo caso</u>

Completate la dimostrazione.
Costruiamo su ABCD il parallelogrammo ABEF avente la stessa base AB e la stessa altezza; il vertice F è esterno al lato DC e i lati AF e BC si intersecano nel punto G.
ABCD è scomposto in ADCG + AGB mentre ABEF è scomposto in BGFE + AGB inoltre ADCG si può scomporre in ADF - CGF come BGFE si può scomporre in BCE - CGF.
Quindi ABCD è scomposto in ADF - CGF + AGB e ABEF è scomposto in BCE - CGF + AGB.
Basta allora dimostrare la congruenza dei triangoli ADF e BCE per dire che ABCD e ABEF sono equiscomposti e dunque equivalenti. Infatti ADF e BCE sono congruenti perché hanno
$AD \cong ...$ perché … … … …
$... \cong BE$ perché … … … …
$DF \cong CE$ perché … … … ...
Concludiamo che … … … … … … … … … … … …

COROLLARIO. **Ogni parallelogrammo è equivalente al rettangolo avente un lato congruente alla base del parallelogrammo e l'altro lato congruente all'altezza.**

Ipotesi: $AB \cong EF, CF \perp AB, CK \cong HE$
Tesi: $ABCD \doteq EFGH$.
<u>Dimostrazione</u> :
Dal vertice D tracciamo l'altezza DL relativa alla base AB; il quadrilatero DLKC è un rettangolo congruente a EFGH; dimostrando che $BCD \doteq DLKC$ si ottiene la tesi.
Completate la dimostrazione.

Osserviamo che ABCD è composto da … … … … … …
e DLKC è composto da … … … … … … …
Consideriamo i triangoli … … … … …
Sono congruenti perché … … … … … … … … … … … …
quindi ………………………………………………….

Il teorema 1 e il suo corollario ci assicurano che i parallelogrammi aventi rispettivamente congruenti le basi e le rispettive altezze formano una classe d'equivalenza avente come rappresentante il rettangolo che ha un lato congruente alla base del parallelogrammo e l'altro lato congruente all'altezza. Possiamo quindi affermare $ABCD \doteq EFGH \Rightarrow Area_{ABCD} = Area_{EFGH}$.

TEOREMA 2. **Un triangolo è equivalente ad un parallelogrammo avente:**
a) base congruente a metà base del triangolo e altezza congruente all' altezza del triangolo, oppure
b) base congruente alla base del triangolo e altezza congruente a metà altezza del triangolo.

Nella figura sono rappresentati il triangolo ABC, il parallelogrammo DEFG avente base congruente a metà base del triangolo e altezza congruente all'altezza del triangolo, il parallelogrammo IJLM avente altezza congruente a metà altezza del triangolo e base congruente alla base del triangolo.

Ipotesi : $AB \perp CH$, $DE \cong \frac{1}{2} AB$, $GK \perp DE$, $GK \cong CH$, $IJ \cong AB$, $MN \perp IJ$, $MN \cong \frac{1}{2} CH$

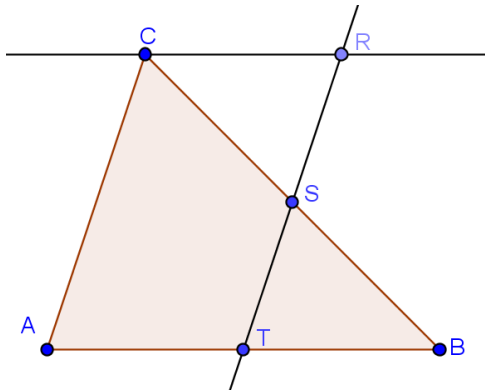
Tesi : a) $ABC \doteq DEFG$; b) $ABC \doteq IJLM$

Dimostrazione caso a.

Dal punto medio T della base AB tracciamo la parallela al lato AC che incontra CB in S; dal vertice C tracciamo la parallela alla base AB che interseca in R la retta ST; il parallelogramma ATRC soddisfa le ipotesi del caso a) ed è equivalente a DEFG per il teorema 1.

Confrontiamo il triangolo e il parallelogrammo: possiamo pensare ABC composto da CATS+BST e ATRC composto da CATS+CSR. Se dimostriamo la congruenza dei triangoli CSR e BST potremo concludere che triangolo e parallelogrammo essendo equicomposti sono equivalenti. Completate con le corrette motivazioni:

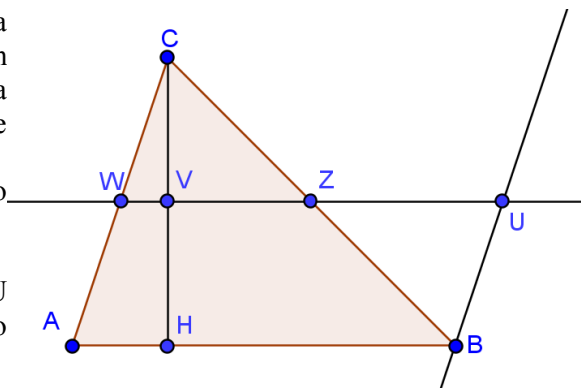
$TB \cong CR$ infatti … … … … …
$SB \cong CS$ infatti … … … … …
$T\hat{B}S \cong S\hat{C}R$ infatti … … … … …

Allora per il primo criterio di congruenza $TBS \cong SCR$ e quindi $ATRC \doteq BST$.

Dimostrazione caso b.

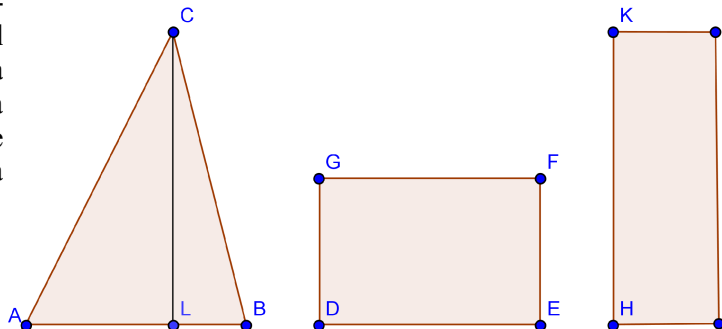
Dal punto medio V dell'altezza CH tracciamo la parallela alla base AB che interseca i lati AC e BC rispettivamente in W e Z; da B tracciamo la parallela al lato AC che interseca la retta WZ in U; il parallelogramma AWUB soddisfa le ipotesi del caso b) ed è equivalente a IJLM per il teorema 1.

Confrontiamo il triangolo e il parallelogrammo: possiamo pensare ABC composto da ………………
e AWUB composto da ………………
Se dimostriamo la congruenza dei triangoli CWZ e ZBU potremo concludere che triangolo e parallelogrammo essendo equicomposti sono equivalenti.

$CW \cong ...$ infatti … … … … …
$CZ \cong ...$ infatti … … … … …
$... \cong Z\hat{B}U$ infatti … … … … …

Pertanto … … … … … … … … … … … … …

COROLLARIO. **Triangoli aventi stessa base e stessa altezza sono equivalenti.**

Lasciamo al lettore la dimostrazione di questa proprietà.

Il teorema 2 e il suo corollario ci assicurano che i triangoli aventi rispettivamente congruenti la base e la rispettiva altezza formano una classe d'equivalenza avente come rappresentante il rettangolo avente un lato congruente alla base del triangolo e l'altro lato congruente a metà altezza, oppure un lato congruente all'altezza e l'altro lato congruente a metà base.

Ipotesi : $CL \perp AB$

$DE \cong AB$ e $DG \cong \frac{1}{2} CL$

$KH \cong CL$ e $HI \cong \frac{1}{2} AB$

Tesi : $ABC \doteq DEFG \doteq HIJK \rightarrow Area_{ABC} = Area_{DEFG} = Area_{HIJK}$.

TEOREMA 3. **Un trapezio è equivalente a un triangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza.**

Ipotesi :

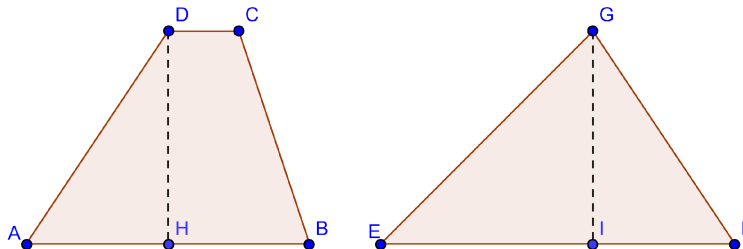
$EF \cong AB + DC$,

$DH \perp AB$,

$GI \perp EF$,

$GI \cong DH$

Tesi :

$ABCD \doteq EFG$.

Dimostrazione :

Prolunghiamo la base AB del segmento BP congruente a DC e congiungiamo D con P.

APD è un triangolo equivalente a EFG avendo stessa base e stessa altezza, quindi basta dimostrare che $ABCD \doteq EFG$.

Confrontiamo il trapezio e il triangolo: possiamo pensare

ABCD composto da … … … … … …

e APD composto da … … … … … …

Se dimostriamo la congruenza dei triangoli … … … … … …

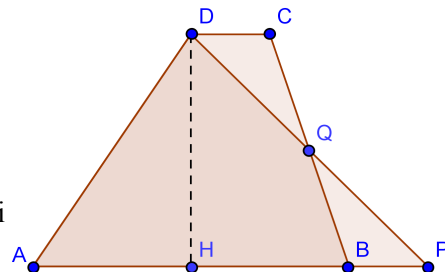
potremo concludere che trapezio e triangolo essendo equicomposti sono equivalenti.

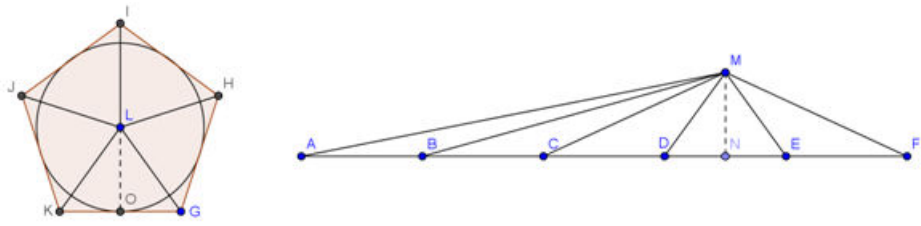
I due triangoli sono congruenti perché hanno

… … … perché … … … … … …

… … … perché … … … … … …

… … … perché … … … … … …

Possiamo quindi affermare che $ABCD \doteq EFG \rightarrow Area(ABCD) = Area(EFG)$. Pertanto, utilizzando il teorema 2 e il suo corollario possiamo sempre determinare il rettangolo equivalente a un trapezio dato.

TEOREMA 4: **Ogni poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo avente per base il segmento somma dei lati del poligono e per altezza il raggio della circonferenza.**

Caso del poligono regolare (pentagono):

Ipotesi : $LO \cong MN$, $AF \cong KG+GH+HI+IJ+LK$, $AB \cong KG$, $BC \cong GH$, $CD \cong HI$, $DE \cong IJ$ $EF \cong JK$.
Tesi : $KGHIJ \doteq AFM$.
Dimostrazione :
I cinque triangoli che compongono il triangolo AFM sono equivalenti ai 5 triangoli che compongono il poligono assegnato, infatti hanno basi … … … … … … … … … … … altezza … … … … … . . … … …
Quindi …

Caso del poligono qualunque:

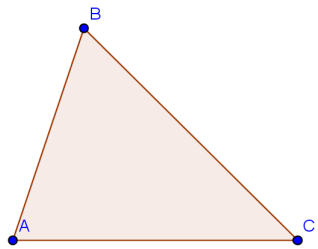
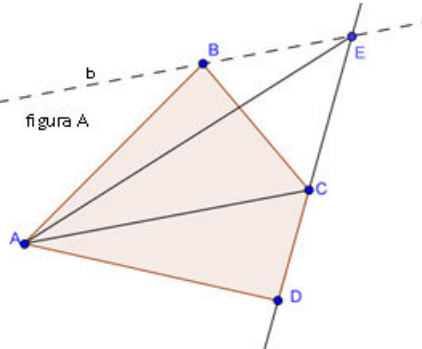
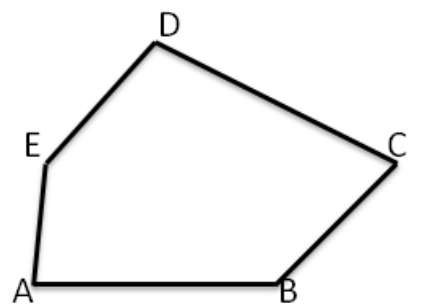
Lasciamo al lettore la costruzione di un poligono circoscritto a una circonferenza e del triangolo equivalente.

Possiamo quindi affermare che ogni poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente ad un triangolo e per il teorema 2 è anche equivalente a un rettangolo.

Si pone ora la questione: è possibile trasformare un qualunque poligono in un rettangolo equivalente?

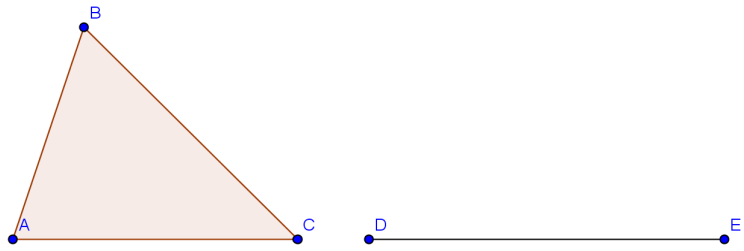
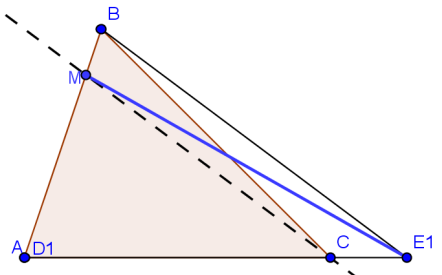
Costruzione di un rettangolo equivalente a un poligono assegnato

Caso 1: poligono convesso

Un qualunque poligono convesso può essere trasformato in un poligono equivalente avente un lato di meno.

Esempio 1. In figura è rappresentato il quadrilatero convesso ABCD, ci proponiamo di costruire un triangolo equivalente ad esso. Dal vertice B tracciamo la parallela *b* alla diagonale AC; il vertice E è il punto di intersezione di b con la retta per DC. I triangoli ABC e ACE sono equivalenti in quanto hanno la stessa base AC e stessa altezza, poiché i loro vertici si trovano sulla retta *b* parallela alla base. Il quadrilatero ABCD si può pensare composto da ADC + ACB; il triangolo ADE è composto da … … … …; poiché sono poligono equicomposti possiamo concludere che $ABCD \doteq ACE$.

Esempio 2. Costruzione di un triangolo equivalente al pentagono convesso ABCDE rappresentato in figura.
Tracciare la diagonale DB.
Dal vertice C la parallela a DB.
Prolungare il lato AB fino a incontrare in F la retta r.
Congiungere D con F.
Si ha che $ABCDE \doteq AFDE$ infatti … … … …
Sul quadrilatero FDE procedere come nell'esempio 1.

Conclusione. Ogni poligono convesso è equivalente a un triangolo e quindi a un rettangolo.

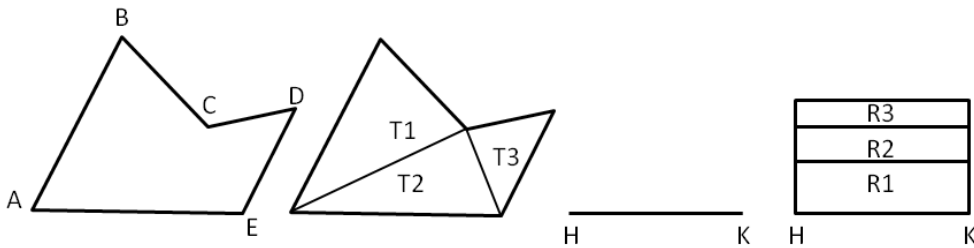
Caso 2: poligono concavo

Premettiamo la costruzione di un triangolo con base assegnata equivalente ad un triangolo ABC dato.

Sia ABC il triangolo e DE il segmento che vogliamo come base del triangolo equivalente.

Sovrapponiamo il segmento DE al lato AC facendo coincidere D con A; l'estremo E è esterno al triangolo assegnato. Indichiamo con D1E1 la base del triangolo che stiamo costruendo equivalente ad ABC. Dopo aver congiunto B con E1 da C tracciamo la parallela a BE1 che incontra in M il lato AB. Il triangolo MD1E1 è equivalente ad ABC.

Completate il ragionamento:
Si ha per costruzione:
$D_1BE_1 = ABC + BCE_1$ e $D_1BE_1 = D_1ME_1 + BME_1$.
Quindi $ABC = D_1BE_1 - BCE_1$ e $D_1ME_1 - BME_1$.
I triangoli BCE_1 e BME_1 sono equivalenti avendo stessa base BE_1 e stessa altezza perché ………………………………………… Possiamo concludere che ………………………

5 Costruite il triangolo equivalente ad ABC e avente come base un segmento minore di AB.

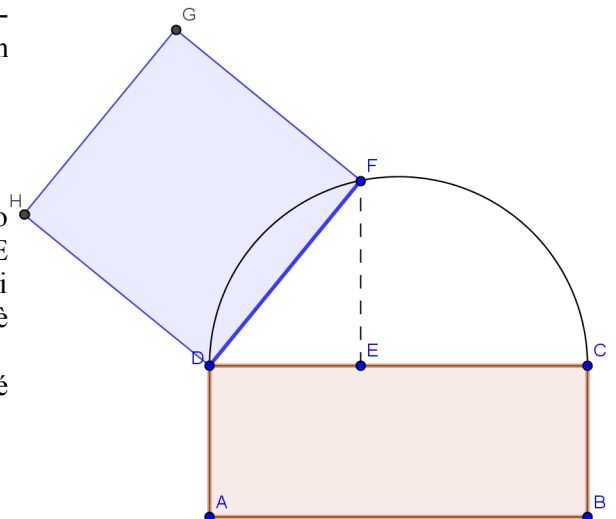
Passiamo ora alla costruzione di un rettangolo equivalente a un poligono concavo.

Assegnato il poligono concavo ABCDE, spezziamo il poligono in 3 triangoli tracciando due diagonali, fissiamo arbitrariamente un segmento HK. iascun triangolo in cui è spezzato ABCDE può essere trasformato in un triangolo equivalente avente HK come base e dunque in un rettangolo avente HK come base; con questi rettangoli possiamo costruire sormontando l'uno all'altro il rettangolo equivalente ad ABCDE.

Possiamo quindi concludere che un qualunque poligono è equivalente a un rettangolo.

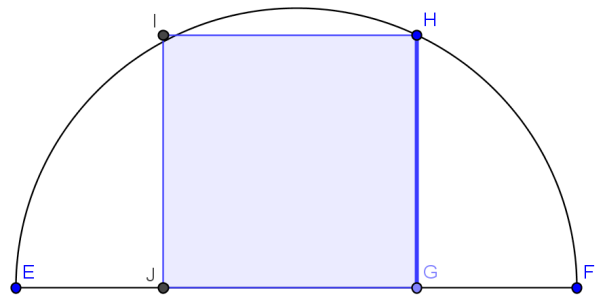
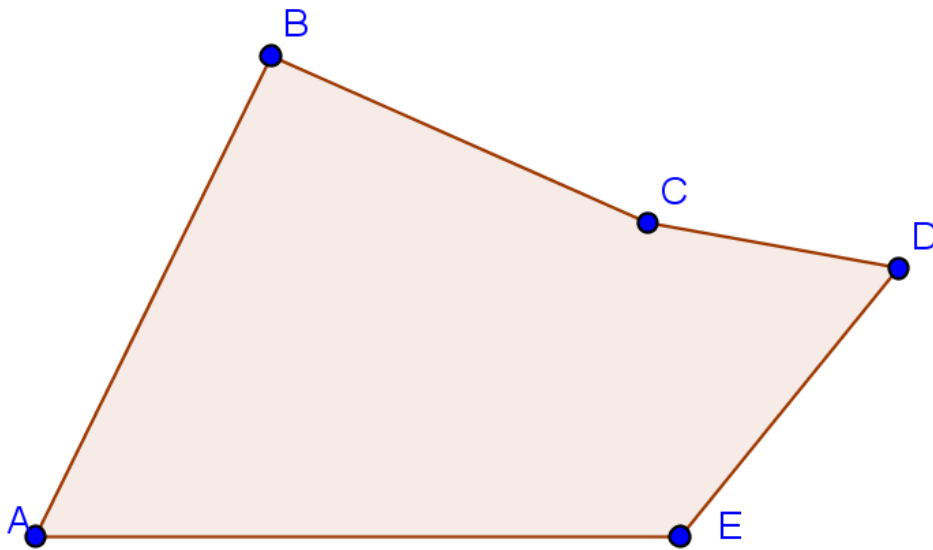
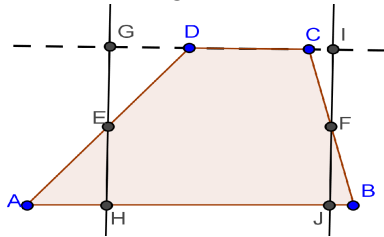
Da un poligono al quadrato equivalente

Nella classe di equivalenza di un qualsiasi poligono c'è sempre un quadrato. Ossia, dato un poligono possiamo sempre trovare un quadrato equivalente.

Abbiamo dimostrato che un qualunque poligono è equivalente a un rettangolo, ora vogliamo dimostrare che, dato un rettangolo esiste sempre un quadrato equivalente ad esso.
Vediamo due possibili costruzioni.

1° modo
Costruiamo la semicirconferenza di diametro DC e fissiamo su di esso il punto E tale che $DE \cong AD$. Dal punto E tracciamo la perpendicolare al diametro e sia F il punto di intersezione con la semicirconferenza. Il triangolo DFE è retto in F perché ………………………
Il quadrato avente come lato DF soddisfa la richiesta perché ……………………………

<u>2° modo</u>

Costruiamo il segmento EF tale che $EF \cong EG+GF$ con $EG \cong AB$ e $GF \cong AD$ e la semicirconferenza di diametro EF. Dal punto G tracciamo la perpendicolare al diametro e sia H il punto di intersezione con la semicirconferenza. Il triangolo EHF è retto in H perché ………………………

Il quadrato avente come lato HG soddisfa la richiesta perché …………………………….

6 Costruite il quadrato equivalente al seguente poligono.

7 Enunciate e dimostrate il teorema le cui ipotesi e tesi sono indicate di seguito.

Ipotesi: $AB \| DC$

$GH \perp AB, CJ \perp AB$, $AE \cong DE, CF \cong FB$

Tesi: $ABCD \doteq GHJI$

8 Dai vertici B e C dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo *ABC* traccia le rette rispettivamente parallele ai cateti AC e AB; sia D il loro punto di intersezione. Dimostrare che $ABDC \doteq 2 \cdot ABC$ e che $MNPQ \doteq 2 \cdot ABC$ dove *MNPQ* è il rettangolo avente un lato congruente all'ipotenusa *BC* e l'altro lato congruente all'altezza *AH* relativa all'ipotenusa.

9 Costruire un rettangolo equivalente ad un trapezio dato.

10 Dimostrare che la mediana relativa ad un lato di un triangolo divide il triangolo dato in due triangoli equivalenti.

11 Dimostrare che in un parallelogrammo ABCD sono equivalenti i quattro triangoli determinati dalle diagonali AC e BD.

12 Assegnato il trapezio ABCD, detto E il punto di intersezione delle diagonali DB e AC, dimostrare che DEA è equivalente a BEC.

13 * Si dimostri che le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli due dei quali equiestesi.

14 * Costruire un triangolo equiesteso al triplo di un rettangolo dato.

15 * Sia ABCD un parallelogramma e sia P un punto del lato CD. Si dimostri che la somma dei triangoli BPD e ACP è equiestesa alla metà del parallelogramma.

16 * Si dimostri che due triangoli sono equiestesi se hanno due lati ordinatamente congruenti e gli angoli tra essi compresi supplementari.

17 * Nel triangolo ABC siano M ed N rispettivamente i punti medi dei lati AC e BC. Si prolunghi il lato AB, dalla parte di B, di un segmento BD tale che AB = 2BD. Dimostrare che il quadrilatero ADNM è equiesteso al triangolo ABC.

18 * Siano M, N, P i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC, AC del triangolo ABC. Dimostrare che i quattro triangoli MNP, AMP, MBN e NCP sono equiestesi.

19 * Dimostrare che una mediana del triangolo ABC lo divide in due triangoli equiestesi.

20 * Si considerino tre poligoni convessi rispettivamente di quattro, cinque e sei lati. Si costruiscano, con riga e compasso, i tre triangoli equiestesi a ciascuno dei tre poligoni.

21 * Descrivere la procedura per trasformare un triangolo ABC nel triangolo rettangolo equiesteso ADB di ipotenusa AB.

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 156-157; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

►3. Aree dei principali poligoni

Per area di una qualunque figura piana intendiamo il numero reale che esprime la misura dell'estensione superficiale della figura data.
Per calcolare le aree dei principali poligoni si ricava per prima l'area del rettangolo e poi, basandosi sui teoremi relativi all'equivalenza delle figure piane, da questa si ricavano le aree di altri poligoni fondamentali.

Area del rettangolo

L'area del rettangolo è data dal prodotto della misura delle sue dimensioni: $A = b \cdot h$ **.**

Dimostrazione

A questo scopo ricorriamo al teorema: "I rettangoli aventi una dimensione congruente sono direttamente proporzionali all'altra dimensione". Consideriamo allora il rettangolo di dimensioni B e H, aventi rispettivamente misura b e h, poi il rettangolo che otteniamo dal dato trasformando una dimensione in quella unitaria: U, di misura 1, ed infine il quadrato di lato U.

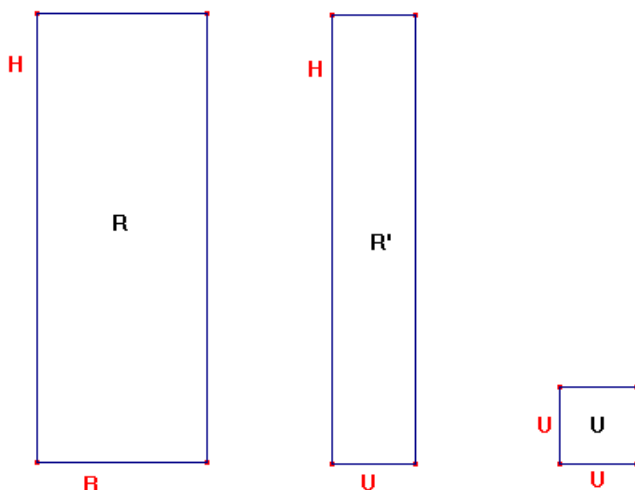
Applichiamo il teorema enunciato in precedenza al rettangolo R, di dimensioni B e H , e al rettangolo R', di dimensioni U e H:

R : R' = B : U

Ora applichiamo lo stesso teorema al rettangolo R' ed al quadrato unitario U:

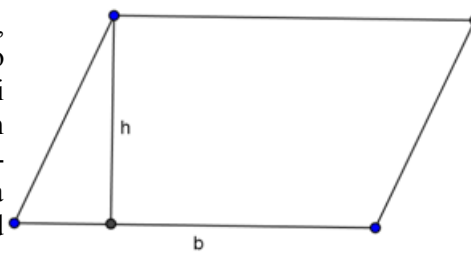
R' : U = H : U

Passiamo dalla proporzione tra le grandezze alla proporzione tra le loro misure, iniziando dall'ultima proporzione e chiamando rispettivamente A ed A' le misure delle estensioni superficiali di R ed R', si ha A' : 1 = h : 1 , da cui ricaviamo A' = h.

Sostituiamo nella prima proporzione le misure di R', B ed U, si ha A : b = h : 1, da cui ricaviamo $A = b \cdot h$, che è proprio ciò che volevamo dimostrare.

Area del quadrato

Poichè il quadrato è un particolare rettangolo avente le dimensioni congruenti tra loro, b = h = l, anche l'area si calcolerà in modo analogo a quella del rettangolo $A = b \cdot h = l \cdot l = l^2$.
Dunque l'area del quadrato è data dal quadrato del lato.

Area del parallelogramma

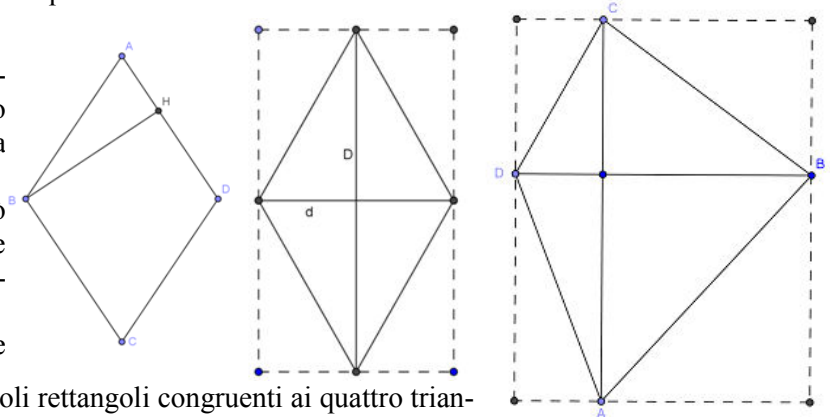
Ricordando il teorema sull'equivalenza tra parallelogrammi, secondo il quale due parallelogrammi sono equivalenti quando hanno un lato (base) e l'altezza ad esso relativa congruenti, da cui deriva come corollario che un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente base ed altezza congruenti a quelle del parallelogramma, è immediato dedurre che anche l'area del parallelogramma si calcola moltiplicando un lato, ritenuto la base, per l'altezza ad esso relativa, cioè $A = b \cdot h$.

Area del triangolo

Anche in questo caso ci si deve rifare al teorema sull'equivalenza tra un triangolo e un parallelogramma: "Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma avente come base metà della base del triangolo ed altezza congruente a quella del triangolo" . Appare allora evidente che l'area del triangolo è $A = \frac{b}{2} \cdot h$, dove b/2 è la base del parallelogramma ad esso equivalente.

Area del trapezio

Sempre dai teoremi sull'equivalenza, sappiamo che "Un trapezio è equivalente ad un triangolo la cui base è congruente alla somma delle basi del trapezio e la cui altezza ad essa relativa è congruente all'altezza del trapezio". Dunque l'area del trapezio sarà $A=\frac{B+b}{2}\cdot h$, dove B + b è la somma delle basi del trapezio, e quindi (B + b)/2 è la base del triangolo ad esso equivalente.

Area del rombo

Poichè il rombo è un particolare parallelogramma, la sua area si trova moltiplicando uno dei suoi lati per l'altezza ad esso relativa (ad esempio, il lato AD per l'altezza BH).
Possiamo però notare che un rombo si può considerare come la metà di un rettangolo le cui dimensioni sono congruenti alle diagonali del rombo.
Come si può facilmente dimostrare, le due diagonali dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli congruenti ai quattro triangoli rettangoli esterni al rombo, e quindi il rombo è equivalente alla metà del rettangolo, per cui la sua area si trova $A=\frac{D\cdot d}{2}$.

Analogamente si dimostra che l'area di un qualsiasi quadrilatero con le diagonali perpendicolari si può determinare in questo modo.

Area di un poligono circoscrivibile ad una circonferenza

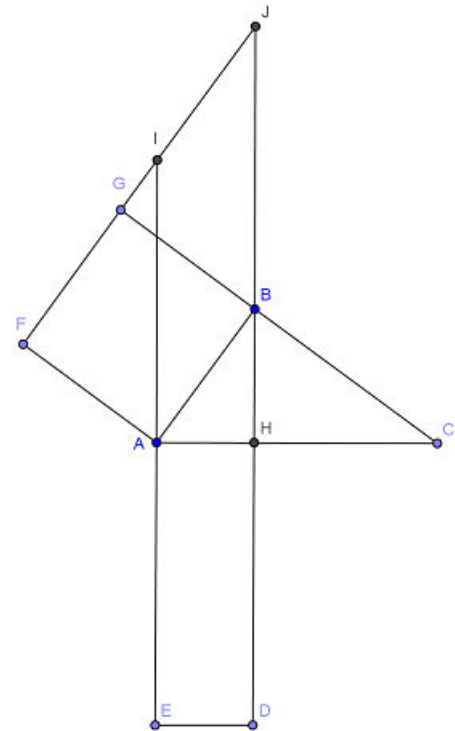
Ricordiamo anche in questo caso il teorema "un poligono circoscrivibile ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo che ha per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza inscritta".
Da qui segue immediatamente che l'area di questo tipo di poligono è data da $A=\frac{2\mathrm{p}\cdot r}{2}=p\cdot r$, dove, come di consuetudine, p indica il semiperimetro.
In particolare, se il poligono è regolare, sarà sempre possibile calcolare l'area per mezzo della formula $A=p\cdot a$, dove a è l'apotema, cioè il raggio della circonferenza inscritta nel poligono regolare.

►4. Teoremi di Pitagora e di Euclide

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE. **In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.**

Facciamo riferimento alla figura a lato.
Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Tracciamo l'altezza BH, relativa all'ipotenusa AC, e prolunghiamola di un segmento HD congruente all'ipotenusa stessa.
Costruiamo il rettangolo di lati AH ed HD. Costruiamo sul cateto AB il quadrato ABGF. Prolunghiamo i lati HD ed AE del rettangolo ed il lato FG del quadrato e chiamiamo I e J i punti di intersezione tra questi prolungamenti. Otteniamo il parallelogramma ABJI.
La tesi da dimostrare è che il quadrato ABGF è equivalente al rettangolo AEDH.
Consideriamo innanzitutto i triangoli AIF e ABC, essi sono congruenti in quanto hanno:

- entrambi un angolo retto $A\hat{F}I$ e $A\hat{B}C$;
- $AF \cong AB$ in quanto lati di un quadrato;
- $F\hat{A}I \cong B\hat{A}C$ in quanto complementari dello stesso angolo IÂB.

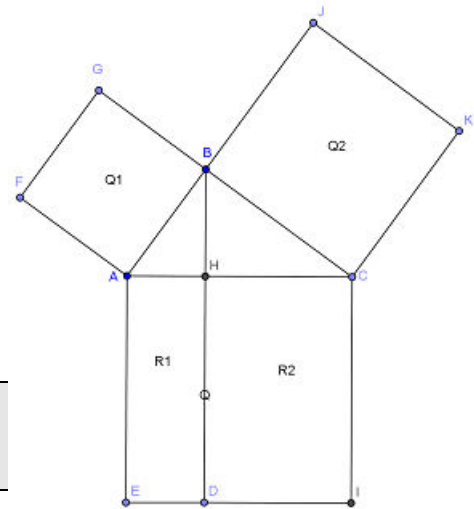
Dunque i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, ed in particolare avranno $AI \cong AC$.
Consideriamo ora il parallelogramma ABJI ed il quadrato ABGF; essi sono equivalenti in quanto hanno il lato AB in comune e la stessa altezza BG relativa a questo lato.
Consideriamo poi il parallelogramma ABJI ed il rettangolo AHDE; anch'essi sono equivalenti per avere basi congruenti, AE e AI entrambe congruenti ad AC, e stessa altezza AH.
Allora per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che anche il quadrato ABGF è equivalente al rettangolo AHDE, e così la tesi è provata ■

Vale anche il teorema inverso.

TEOREMA INVERSO. **Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni il lato maggiore del triangolo e la proiezione del primo lato su di esso, allora il triangolo è rettangolo**.

Per la dimostrazione si usa la stessa costruzione fatta per il teorema diretto; si inizia dimostrando nello stesso modo l'equivalenza tra il quadrato ABGF ed il parallelogramma ABJI. Poiché per ipotesi il rettangolo AHDE è equivalente al quadrato ABGF, allora per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che il rettangolo AHDE ed il parallelogramma ABJI sono equivalenti. Poiché parallelogramma e rettangolo hanno la stessa altezza AH, essendo equivalenti dovranno avere congruenti le basi $HD \cong BJ$. Ma per costruzione $HD \cong AC$, e quindi sarà anche $BJ \cong AC$, da cui segue $AI \cong BJ \cong AC$. Quindi i triangoli AIF ed ABC saranno congruenti per il primo criterio in quanto hanno $AI \cong AC, AB \cong AF$ poichè lati di un quadrato, $F\hat{A}I \cong B\hat{A}C$ in quanto complementari dello stesso angolo $I\hat{A}B$. Dunque avranno anche gli angoli $A\hat{F}I \cong A\hat{B}C$, e poiché $A\hat{F}I$ è retto lo sarà anche $A\hat{B}C$ ■

TEOREMA DI PITAGORA. **In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti**.

Dopo aver disegnato i quadrati di cui parla l'ipotesi, tracciamo l'altezza BH relativa all'ipotenusa AC, e prolunghiamola finchè non incontri il lato IE del quadrato Q, il quale risulta così diviso in due rettangoli R1 ed R2.

Consideriamo il triangolo rettangolo ABH ed applichiamo ad esso il primo teorema di Euclide; avremo quindi che $Q1 \doteq R1$. Applichiamo ora il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo BHC; avremo che $Q2 \doteq R2$. Sommiamo ambo i membri di queste due equivalenze ed otteniamo che $Q1+Q2 \doteq R1+R2$. Ma $R1+R2 \doteq Q$, da cui segue, per la proprietà transitiva dell'equivalenza $Q \doteq Q1+Q2$, che è proprio quanto volevamo dimostrare■

Anche per il teorema di Pitagora vale il teorema inverso.

TEOREMA INVERSO. **Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, allora il triangolo è rettangolo**.

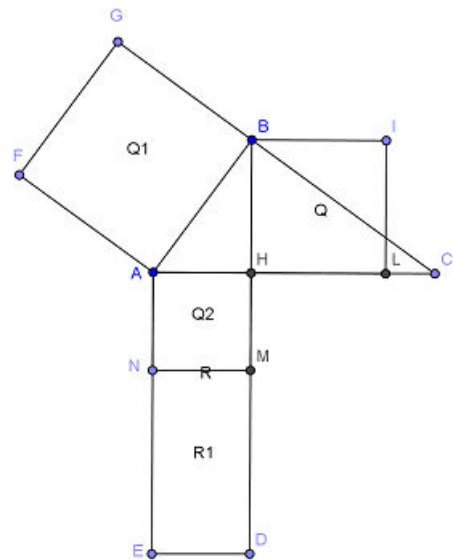
Sia ABC il triangolo per cui vale il teorema di Pitagora; vogliamo dimostrare che questo triangolo è rettangolo.

Consideriamo il triangolo rettangolo A'B'C', i cui cateti A'B' e A'C' siano rispettivamente congruenti ai due lati del triangolo AB e AC. Al triangolo A'B'C' possiamo applicare il teorema di Pitagora, per cui abbiamo che il quadrato costruito su B'C' è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti A'B' e A'C'. I quadrati costruiti sui lati congruenti AB e A'B' sono congruenti, così come lo sono i quadrati costruiti su AC e A'C', quindi avremo che : Q(AB) + Q(AC)   Q(A'B') + Q(A'C'). Poiché per ipotesi Q(AB) + Q(AC)   Q(BC) e , avendo applicato il teorema di Pitagora al triangolo A'B'C', sarà anche Q(A'B') + Q(A'C')   Q(B'C'), per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che : Q(BC)   Q(B'C'). Poiché due quadrati sono equivalenti quando hanno lo stesso lato, avremo che BC   B'C', e quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio. Allora saranno congruenti anche gli angoli Â e Â', e poiché Â' è retto, lo sarà anche Â, e quindi ABC è anch'esso un triangolo rettangolo■

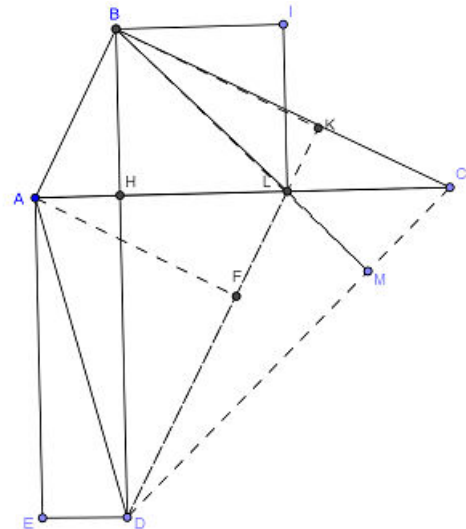
II TEOREMA DI EUCLIDE. **In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa**.

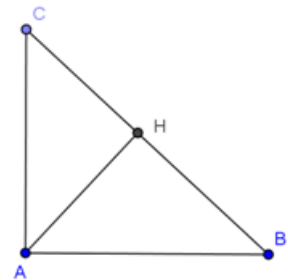
Dobbiamo dimostrare che il quadrato Q che ha come lato l'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo R1 che ha come lati le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

La costruzione è la seguente: dopo aver disegnato il quadrato Q si disegnano anche il quadrato Q1 che ha come lato un cateto ed il rettangolo R che ha come lati l'ipotenusa e la proiezione AH di questo cateto sull'ipotenusa. All'interno di questo rettangolo possiamo individuare il quadrato Q2 di lato AH, ed il rettangolo R1, che ha come dimensioni $NM \doteq AH$ e $MD \doteq HD-HM \doteq HC$, in quanto $HD \doteq AC$ e $HM \doteq AH$.

Consideriamo ora il triangolo rettangolo ABH, ed applichiamo ad esso il teorema di Pitagora, risulta $Q1 \doteq Q+Q2$. Applichiamo ora al triangolo ABC il primo teorema di Euclide, si ha $Q1 \doteq R$. Confrontiamo le due relazioni ed applichiamo la proprietà transitiva dell'equivalenza $Q+Q2 \doteq R$. Ma $R \doteq Q2+R1$, quindi sostituendo avremo $Q+Q2 \doteq Q2+R1$, e sottraendo ad ambo i membri la stessa quantità Q2, otteniamo la tesi $Q \doteq R1$ ■

Anche per questo teorema vale il teorema inverso.

TEOREMA INVERSO. **Se in un triangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, il triangolo è rettangolo**.

Costruiamo il quadrato BILH sull'altezza relativa all'ipotenusa ed il rettangolo AHDE che ha come lati le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa; essi sono equivalenti per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che il triangolo ABC è rettangolo.
Congiungiamo D con C, tracciamo la diagonale BL del quadrato e prolunghiamola finchè non incontri DC il M. Tracciamo infine la diagonale AD del rettangolo. Consideriamo i triangoli ADH e BHL, sono equivalenti in quanto metà di figure equivalenti. Ora consideriamo i triangoli ADL e BDL, sono equivalenti in quanto somme di figure equivalenti: i triangoli ADH, BHL a cui aggiungiamo lo stesso triangolo HDL. Essendo equivalenti ed avendo la stessa base DL dovranno avere anche la stessa altezza $AF \cong BK$, cioè la stessa distanza tra AB e DK, e quindi AB e DK sono paralleli.
Detto M il punto intersezione tra le rette DC e BL, notiamo che, essendo BHL e HDC triangoli rettangoli isosceli, avranno gli angoli alla base di 45°; ma è anche $H\hat{L}B \cong M\hat{L}C = 45°$ in quanto opposti al vertice, perciò $L\hat{M}C = 90°$. Allora BM e CH sono due altezze del triangolo BDC, e poiché s'incontrano nel punto L questo risulta essere l'ortocentro del triangolo, e poiché il segmento BK passa per l'ortocentro deve essere a sua volta altezza relativa a BC. Ma poiché avevamo già dimostrato che DK è parallelo al AB , se DK è perpendicolare a BC lo sarà anche AB, e quindi il triangolo ABC è un triangolo rettangolo■

►5. Applicazioni dei teoremi di Euclide e Pitagora

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC in figura.
Supponiamo di conoscere la misura dell'ipotenusa BC e della proiezione CH del cateto AC, sull'ipotenusa BC; allora possiamo applicare il I teorema di Euclide per trovare la lunghezza del cateto AC: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CH}$, da cui ricavo $\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{CH}}$.
Se invece conosciamo la lunghezza del cateto AC e della sua proiezione CH e vogliamo trovare l'ipotenusa, allora avremo $\overline{BC} = \frac{\overline{AC}^2}{CH}$.
Supponiamo ora di conoscere le misure delle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa BH e CH, e di voler trovare la misura di AH altezza relativa all'ipotenusa, applicando il II teorema di Euclide avremo $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$, da cui ricavo $\overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{CH}}$.
Se vogliamo invece trovare la lunghezza di una delle due proiezioni e conosciamo l'altezza relativa all'ipotenusa, ad esempio, CH, avremo $\overline{BH} = \frac{\overline{AH}^2}{CH}$.
Per quanto riguarda poi le applicazioni del teorema di Pitagora, che sicuramente gli studenti conoscono già dalle scuole medie, ricordiamo che se abbiamo la misura dei due cateti avremo $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, da cui $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$; viceversa, conoscendo l'ipotenusa ed un cateto, ad esempio AC, avremo $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}$.

Esempi

- Calcolare perimetro ed area di un triangolo rettangolo che ha un cateto lungo 10 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa lunga 8 cm.

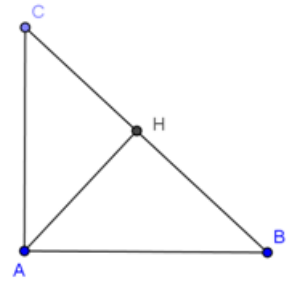
Facciamo riferimento alla figura a lato, $\overline{AC}=10\text{cm}, \overline{CH}=8\text{cm}$.

Applichiamo il primo teorema di Euclide per trovare la lunghezza dell'ipotenusa $\overline{BC}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{CH}}=\frac{100}{8}=12{,}5\,cm$. Per trovare l'altro cateto possiamo applicare il teorema di Pitagora $\overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{\frac{625}{4}-100}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}=7{,}5\,cm$.

Quando il teorema di Pitagora viene applicato per trovare un cateto si può anche semplificare il calcolo scomponendo la differenza di quadrati

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{(\overline{BC}-\overline{AC})\cdot(\overline{BC}-\overline{AC})}=\sqrt{\left(\frac{25}{2}-10\right)\left(\frac{25}{2}+10\right)}=\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{45}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{5\cdot 9}{2}}=\frac{5\cdot 3}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5\,cm$$

A questo punto conosciamo tutti i lati, quindi possiamo trovare il perimetro: 2p=(8+7,5+12,5)cm = 30 cm

Per trovare l'area (cateto x cateto) / 2 = 37,5cm^2.

- Dato il triangolo rettangolo ABC, di cui si conosce la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa 12cm, ed il perimetro del triangolo rettangolo formato da quest'altezza e da uno dei cateti 36 cm, trovare la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa ed il perimetro del triangolo ABC.

Dai dati ho che AH = 12cm, e $2p_{ABH}$ = 36 cm.

Questo vuol dire che AB + BH = 2p - AH = 24 cm.

Posso allora porre AB = x, da cui BH = 24 – x.

Applico il teorema di Pitagora ed ottengo l'equazione :

$x^2 = 12^2 + (24 - x)^2 \rightarrow x^2 = 12^2 + 24^2 - 48x + x^2$;

dal calcolo, x^2 si elimina ed ottengo l'equazione di I grado $48x = 24^2 + 12^2$;

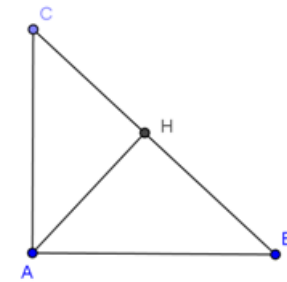
per evitare i calcoli posso raccogliere al secondo membro 12^2; ricavo x ed ho

$$x=\frac{12^2(2^2+1)}{4\cdot 12}=15\text{cm}$$

A questo punto posso ottenere BH = 24-x = 24-15 = 9 cm. Oppure, ricorrendo alla terna pitagorica fondamentale 3, 4, 5, di cui i lati del triangolo ABH sono multipli secondo il numero 3, ho BH = 3 • 3 = 9 cm.

Ora per trovare CH applico il II teorema di Euclide $\overline{CH}=\frac{\overline{AH}^2}{\overline{BH}}=\frac{144}{9}=16\text{cm}$.

Sommando CH con BH trovo l'ipotenusa BC=25 cm. Per trovare l'altro cateto ricorro alla terna pitagorica fondamentale AB = 3 • 5 =15 cm, BC = 5 • 5 = 25 cm, da cui AC = 4 • 5 = 20 cm.

Il perimetro allora vale (15 + 25 + 20) cm = 40 cm.

22 * Da un punto C di una circonferenza di centro O si conduca la perpendicolare CH al diametro AB. Si dimostri che il rettangolo di lati AB e AH è equiesteso al quadrato costruito su AC.

23 * Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC. Dal punto medio M del cateto AC si conduca la perpendicolare MH all'ipotenusa BC. Dimostrare che il quadrato costruito su AB è equiesteso alla differenza dei quadrati costruiti su BH e HC.

24 * Sia P un punto interno del rettangolo ABCD. Dimostrare che la somma dei quadrati costruiti su AP e PC è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su BP e PD.

25 * Sia CD una corda perpendicolare in H al diametro AB di una circonferenza di centro O. Sulle tangenti alla circonferenza in A e in B si scelgano, nel semipiano individuato da AB che non contiene C, rispettivamente i punti E ed F tali che $AE \cong BF \cong BF \cong AH$. Dimostrare che il quadrilatero AEFB è equiesteso al quadrato costruito sulla corda AC.

26 * Si disegnino un rettangolo ABCD e la sua diagonale AC, quindi la perpendicolare BH ad AC. Si dimostri che il rettangolo avente dimensioni AH ed AC #e equiesteso al quadrato costruito su AB.

27 * Si dimostri che un quadrato è equiesteso ad un rettangolo le cui dimensioni sono congruenti alla diagonale e alla metà della diagonale del quadrato.

28 * Disegnare il triangolo ABC rettangolo in A, quindi prolungare il cateto AB, dalla parte di B, di un segmento BD, quindi congiungere D con C. Dimostrare che la somma dei quadrati costruiti su AB e CD è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su AD e BC.

29 * Disegnare un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, e sia P un punto qualunque interno ad AB. Dimostrare che la somma dei quadrati costruiti su AB e CP è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su AP e BC.

30 * Costruire un triangolo rettangolo equivalente alla metà di un triangolo ABC dato.

31 * Siano ABCD un rettangolo e AE un triangolo costruito esternamente al rettangolo. Si dimostri che la somma dei quadrati costruiti su CE e AE è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su BE e DE.

32 * Sia ABCD un quadrilatero con le diagonali perpendicolari. Dimostrare che la somma dei quadrati costruiti su AB e CD è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su AD BC.

33 * Disegnare un quadrato ABCD ed un suo punto interno E. Dimostrare che la somma dei quadrati delle distanze di E dai lati dei quadrati è equiestesa alla somma dei quadrati costruiti su AE, BE, CE e DE.

34 * Considerare il quadrato ABCD e la sua diagonale AC. Dimostrare che il quadrato costruito su AC è equiesteso al doppio del quadrato ABCD.

35 * Sia ABCD un trapezio isoscele inscritto in una circonferenza. Dimostrare che il quadrato costruito sul raggio della circonferenza è equiesteso al rettangolo che ha per dimensioni i segmenti congruenti alla metà delle basi del trapezio.

36 * Si disegnino un rettangolo ABCD e la sua diagonale AC, quindi la perpendicolare BH ad AC. Si dimostri che il quadrato costruito su BH è equiesteso al rettangolo avente dimensioni AH e CH.

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Doà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pag.163; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

►6. Applicazioni dell'algebra alla geometria

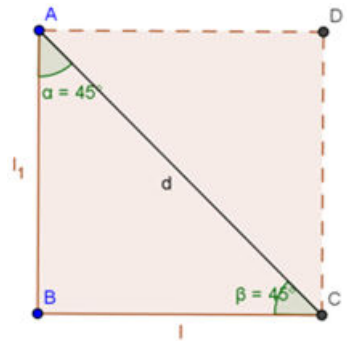
Triangoli rettangoli con angoli di 45°

Un triangolo rettangolo avente un angolo di 45° è necessariamente isoscele, in quanto anche il terzo angolo varrà 45°, infatti 180° - (90°+45°)=45°

Chiamando *c* ognuno dei due cateti, *i* l'ipotenusa ed applicando il teorema di Pitagora avremo $i=\sqrt{c^2+c^2}=\sqrt{2c^2}=c\sqrt{2}$.

Viceversa, se conosciamo l'ipotenusa e vogliamo ricavare i cateti, passando alla formula inversa e razionalizzando avremo $c=\frac{i}{\sqrt{2}}=i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$.

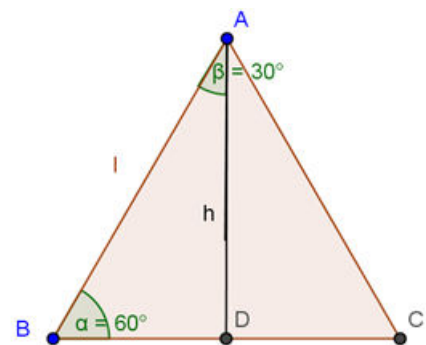
Un triangolo rettangolo isoscele può anche essere interpretato come metà di un quadrato, di cui i cateti sono i lati e l'ipotenusa è la diagonale.

Chiamando l il lato e d la diagonale, anche per un quadrato varranno le precedenti relazioni $d=l\cdot\sqrt{2}\,;\,l=\frac{d}{\sqrt{2}}=d\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°

Un triangolo rettangolo con un angolo di 30° avrà il secondo angolo acuto di 60°, infatti 180°- (90°+30°)=60° . Questo triangolo può essere interpretato come metà di un triangolo equilatero: l'ipotenusa è il lato di questo triangolo, il cateto adiacente all'angolo di 60° è metà lato ed il cateto adiacente all'angolo di 30° è l'altezza del triangolo equilatero. In questo caso, se *i* è l'ipotenusa, allora il cateto BD, adiacente all'angolo di 60°, varrà $\frac{i}{2}$, ed il cateto AD, opposto all'angolo di 60° ed adiacente a quello di 30°, applicando il teorema di Pitagora, varrà $AD=\sqrt{i^2-\left(\frac{i}{2}\right)^2}=\sqrt{i^2-\frac{i^2}{4}}=\sqrt{\frac{3i^2}{4}}=\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}$.

Viceversa, se conosciamo il cateto AD e vogliamo ricavare l'ipotenusa, passando alla formula inversa e razionalizzando avremo $i=\frac{2\text{AD}}{\sqrt{3}}=2\text{AD}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$

Chiamando ora *l* il lato del triangolo equilatero ed *h* l'altezza, avremo analogamente $h=l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,l=2\text{h}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$.

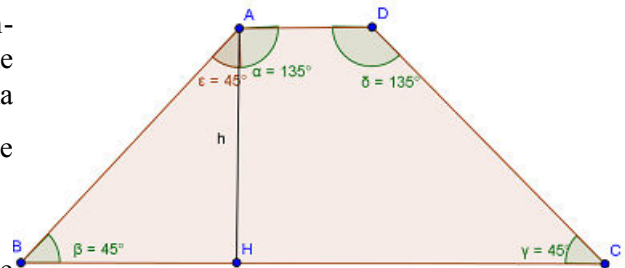
In questo modo possiamo anche determinare l'area di un qualunque triangolo equilatero conoscendo solo il lato $A=\frac{b\cdot h}{2}=l\cdot l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=l^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

<u>Esempio</u>

■ Gli angoli adiacenti alla base minore di un trapezio isoscele misurano 135°. Determinare area e perimetro del trapezio, sapendo che le basi misurano cm 4 e cm 20.

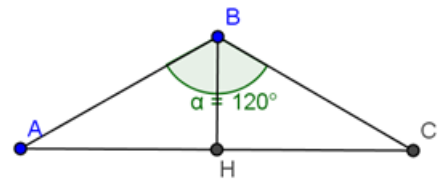
Traccio l'altezza AH; si verrà così a determinare il triangolo rettangolo ABH; poiché $A\hat{B}H=45°$, anche $B\hat{A}H=45°$. Avremo quindi $\overline{BH}=\overline{AH}$; ma $BH=\frac{BC-AD}{2}=8\text{cm}$, quindi AH=8cm. L'area dunque vale

$\frac{(20+4)\cdot 8}{2}cm^2=96\text{cm}^2$.

Per trovare il perimetro basta ricordare che $AB=BH\cdot\sqrt{2}=8\cdot\sqrt{2}\,cm\,;\,CD=AB$.

Dunque $2\text{p}=(20+4+2\cdot 8\sqrt{2})cm=24+16\cdot\sqrt{2}\,cm=8(3+2\sqrt{2})\,cm$

Esempio

- Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice di 120°. Determina perimetro ed area sapendo che la base è lunga 60 cm.

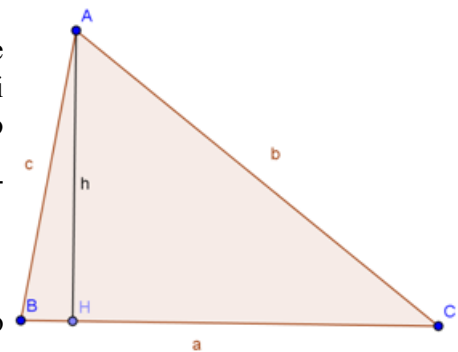
Traccio l'altezza BH. Poiché il triangolo è isoscele, l'altezza relativa alla base è anche mediana, quindi AH = HC; ma BH è anche bisettrice dell'angolo al vertice B, quindi ho ottenuto due triangoli rettangoli congruenti tra di loro, ciascuno dei quali ha in B un angolo di 60°. Considero uno dei due triangoli, ad esempio ABH; il cateto AH = 30 cm; poiché l'angolo Â vale 30°, per trovare AB devo usare la formula inversa $\overline{AB}=\frac{2\,\overline{AH}\sqrt{3}}{3}=\frac{2\cdot 30\text{cm}\sqrt{3}}{3}=20\sqrt{3}\,cm$

Il perimetro vale dunque (60 + 40√3)cm = 20 (3 + 2√3)cm.

Per trovare l'area devo calcolare BH, che è congruente a metà ipotenusa $BH=10\sqrt{3}\,cm$.

$Area=\frac{60\cdot 10\sqrt{3}}{2}cm^2=300\sqrt{3}\,cm^2$.

Formula di Erone per il calcolo dell'area di un trianngolo

La formula di Erone permette di trovare l'area di un triangolo qualsiasi se si conoscono le misure dei lati.

Sia *a* la misura del lato BC; poniamo BH = x, dunque sarà HC = a - x. Troviamo h con il teorema di Pitagora $(1)\ h^2=c^2-x^2$ ma anche $h^2=b^2-(a-x)^2$. Uguagliamo le due espressioni e svolgiamo i calcoli $c^2-x^2=b^2-a^2+2\text{a}x-x^2$; da qui ricaviamo $x=\frac{c^2+a^2-b^2}{2\text{a}}$. Sostituiamo questo valore di x nella (1), otteniamo $h^2=c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2\text{a}}\right)^2=\frac{4\text{a}^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4\text{a}^2}$.

Poichè il numeratore è una differenza di quadrati possiamo scomporlo

$$h^2=\frac{\left[2\text{ac}-(c^2+a^2-b^2)\right]\cdot\left[2\text{ac}+(c^2+a^2-b^2)\right]}{4\text{a}^2}=\frac{(2\text{ac}-c^2-a^2+b^2)\cdot(2\text{ac}+c^2+a^2-b^2)}{4\text{a}^2}=\frac{\left[b^2-(a-c)^2\right]\cdot\left[(a+c)^2-b^2\right]}{4\text{a}^2}$$

Abbiamo ottenuto nuovamente delle differenze di quadrati, che possiamo ulteriormente scomporre $h^2=\frac{(b+a-c)(b-a+c)(a+c+b)(a+c-b)}{4\text{a}^2}$.

Ora al numeratore abbiamo a + c + b = 2p; b + a - c può essere scritto come b+a+c-2c = 2p-2c = 2(p-c); analogamente b - a + c = 2p - 2a = 2 (p - a) ; a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b)

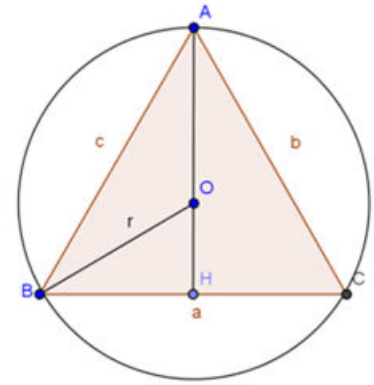
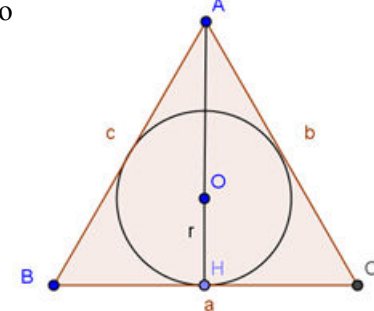
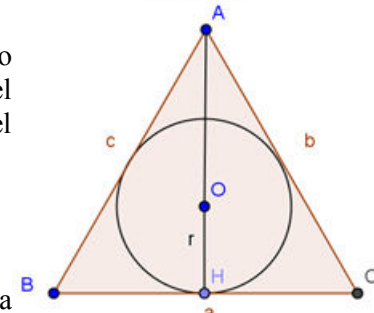
Quindi $h=\sqrt{\frac{2\text{p}\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4\text{a}^2}}=\sqrt{\frac{16\text{p}(p-a)(p-b)(p-c)}{4\text{a}^2}}$

Semplifichiamo il 16 al numeratore col 4 al denominatore, estraiamo il 4 dalla radice e lasciamo a sotto radice. Infine calcoliamo l'area

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2}{a}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Triangoli equilateri inscritti e circoscritti

Consideriamo un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza, e vediamo che relazione c'è tra il suo lato ed il raggio della circonferenza.
Poichè in un triangolo equilatero il circocentro coincide con il baricentro, ricordando il teorema del baricentro, secondo il quale le tre mediane di un triangolo s'incontrano in uno stesso punto detto baricentro, che le divide in modo tale che la parte che contiene il vertice è il doppio dell'altra, avremo che AO = r , OH = r/2, quindi l'altezza AH (che coincide con la mediana) è data da $AH=r+\frac{r}{2}=\frac{3}{2}r$

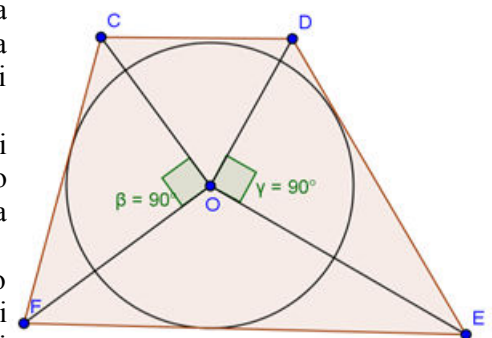
Per quanto visto precedentemente, il lato è dato da $l=\frac{3}{2}r\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=r\sqrt{3}$.

Consideriamo ora un triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza.
Per quanto detto prima, AO, parte della mediana che contiene il vertice, è il doppio di OH = r, raggio della circonferenza inscritta, e quindi, se conosciamo il raggio della circonferenza inscritta, avremo che AH (mediana e altezza del triangolo) vale 3r. Da qui possiamo anche in questo caso ricavare il lato del triangolo $l=3\text{r}\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\text{r}\sqrt{3}$.

Esempio

- Determina l'area di un triangolo equilatero sapendo che il raggio della circonferenza inscritta è lungo 6 cm. Determina poi anche il raggio della circonferenza circoscritta.

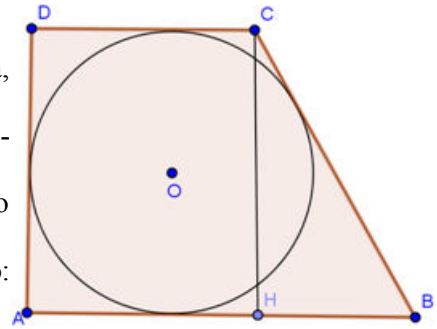
Facendo riferimento alla figura,
AH del triangolo vale 3r, quindi AH = 18 cm.
Il lato vale 2r , quindi BC = 12 cm.
Area = 12 •18 : 2 cm2 = 108 cm^2.
Raggio circonferenza circoscritta = AO = 2r = 12 cm.

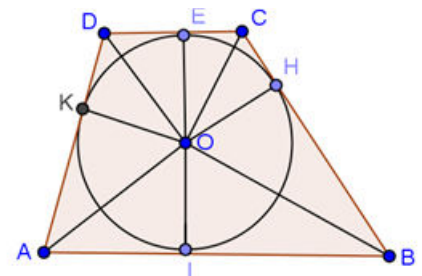
Trapezi circoscritti ad una circonferenza.

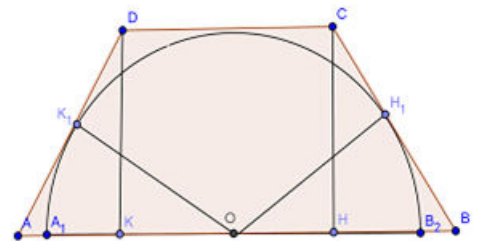
Sappiamo che in un qualunque quadrilatero circoscrivibile ad una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due; questo teorema vale ovviamente per tutti i trapezi circoscrivibili.
Inoltre possiamo dimostrare un'altra importante proprietà: in ogni trapezio circoscrivibile ognuno dei due triangoli che si ottengono congiungendo gli estremi di un lato obliquo con il centro della circonferenza è un triangolo rettangolo.
Infatti CO e OF sono le bisettrici degli angoli in C e in D, lo stesso dicasi per DO e EO (vedi la dimostrazione del teorema sulle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza); poichè gli angoli in C e in D sono supplementari tra di loro, così come gli angoli in E e in F, le loro metà saranno complementari, cioè $O\hat{C}F+C\hat{F}O=90°;O\hat{D}E+D\hat{E}O=90°$. Ma allora gli angoli $C\hat{O}F$ e $D\hat{O}E$ sono retti, per differenza tra 180° (somma degli angoli interni di un triangolo) e 90°.

Queste importanti proprietà permettono di risolvere la maggior parte dei problemi sui trapezi circoscrivibili.

Esempi

- In un trapezio rettangolo, circoscrittibile ad una circonferenza di raggio 6 cm, il lato obliquo misura 25/2 cm. Determina perimetro ed area del trapezio.

L'altezza CH è congruente al diametro della circonferenza inscritta, quindi CH = AD = 12 cm.
Applicando il teorema sui quadrilateri circoscrittibili ad una circonferenza, abbiamo BC + AD = AB + CD.
Poichè BC + AD = (12 + 25/2) cm = 49/2 cm, per trovare il perimetro basta moltiplicare questa misura per 2 e si ha 2p=(49/2 • 2)cm=49cm.
Anche il calcolo dell'area è immediato: $A=\frac{(AB+CD)\cdot CH}{2}=\frac{\frac{49}{2}\cdot 12}{2}cm^2=147cm^2$.

- Nel trapezio ABCD, circoscritto ad una circonferenza, il punto E di tangenza con la base minore CD la divide in due parti: CE = 6a e DE = 12a. Sapendo che la base maggiore AB è il doppio del lato obliquo AD, determina perimetro ed area del trapezio.

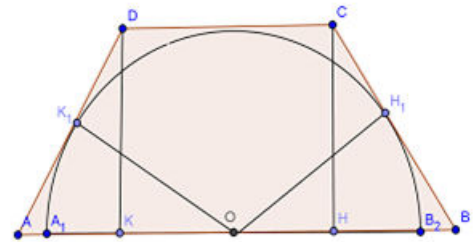
Dai dati si deduce immediatamente che la base minore CD = 18a.
Per il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza sappiamo che, se OH è il raggio, sarà CE=CH=6a, DE=DK=12a.
Applichiamo ora il secondo teorema di Euclide prima al triangolo rettangolo BOC e poi al triangolo rettangolo AOD, si ha $\overline{OH}^2=\overline{BH}\cdot\overline{HC}$; $\overline{OK}^2=\overline{DK}\cdot\overline{AK}$.
Poichè OH=OK in quanto raggi, possiamo uguagliare i secondi membri ed avremo $\overline{BH}\cdot\overline{HC}=\overline{DK}\cdot\overline{AK}$. Sostituiamo i valori che ci fornisce il testo ed abbiamo $\overline{BH}\cdot 6a=\overline{AK}\cdot 12a$, da cui ricaviamo BH=2AK. Poniamo AK = x , allora sarà AD=x+12a, BH=2x, BC=2x+6a. Poichè inoltre AB=2AD, avremo AB = 2(x + 12a) . Ma AB=AI+BI, e cioè, sempre per il teorema delle tangenti, AB=BH+AK, cioè AB = 2x + x = 3x. Uguagliando anche in questo caso i secondi membri avremo 2(x+12a)=3x, da cui x = AK = 24a. Sostituendo il valore di x nelle uguaglianze precedenti avremo: AB=72a, BC=54a, AD=36a. Calcoliamo il perimetro 2p=72a+54a+36a+18a=180a.
Per calcolare l'area basta determianre la lunghezza del raggio, in quanto l'altezza è uguale al diametro della circonferenza. Applicando il secondo teorema di Euclide, poichè BH=2x=48a, sarà $\overline{OH}^2=\overline{BH}\cdot\overline{HC}=48a\cdot 6a=288a^2$, $\overline{OH}=12a\sqrt{2}$. Dunque l'altezza del trapezio vale $2\overline{OH}=24a\sqrt{2}$
L'area allora sarà $\frac{(72a+18a)\cdot 24a\sqrt{2}}{2}=1080a^2\sqrt{2}$.

Trapezi circoscritti ad una semicirconferenza

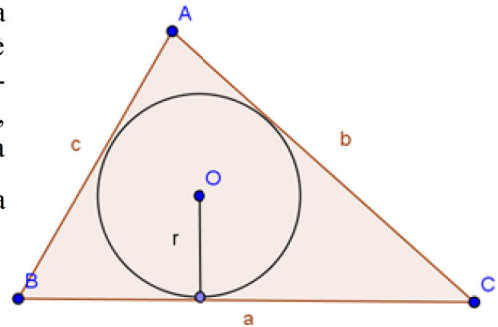
Un trapezio si dice circoscritto ad una semicirconferenza se la base maggiore è sulla retta che contiene il diametro e se la base minore ed i lati obliqui sono tangenti alla semicirconferenza.
Dato il trapezio ABCD circoscritto ad una semicirconferenza, sussiste questa proprietà: ognuna delle due parti in cui la base maggiore è divisa dal centro della semicirconferenza è congruente al lato obliquo ad essa adiacente; guardando la figura, questo vuol dire che $OB\cong BC\,;OA\cong AD$. Dimostriamo la proprietà considerando i due triangoli OBH_1 e BCH (ragionamento analogo varrà per gli altri due triangoli); questi due triangoli sono entrambi rettangoli in quanto CH è altezza e OH_1 è raggio che cade nel punto di tangenza; inoltre hanno $CH\cong OH_1$ in quanto entrambi raggi e l'angolo acuto $H\hat{B}C$ in comune, quindi sono congruenti per uno dei criteri di congruenza dei triangoli rettangoli (un cateto e l'angolo acuto ad esso opposto rispettivamente congruenti). Da qui segue allora la congruenza tra le due ipotenuse: $OB\cong BC$.

Esempio

- Nel trapezio ABCD, circoscritto ad una semicirconferenza, la base minore ed un lato obliquo misurano entrambi 6 cm, mentre la base maggiore misura 15 cm. trovare perimetro ed area del trapezio.

Per quanto appena dimostrato, la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui, dunque avremo AB=BC+AD; sapendo che uno dei due lati obliqui, ad esempio AD, vale 6 cm, ricaviamo subito BC=AB-AD=15 cm - 6 cm = 9 cm.

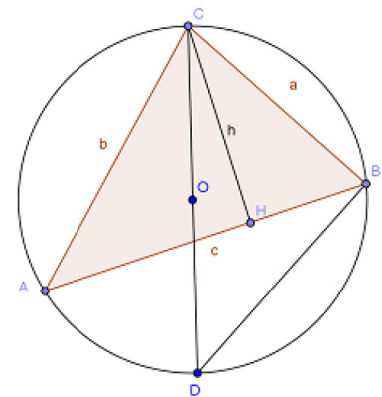
Il perimetro dunque vale 2p = (15 + 9 + 6 + 6) cm = 36 cm.
Per calcolare l'area abbiamo bisogno dell'altezza.
Poniamo BH=x, quindi sarà AK=AB-(CD+BH)=15-6-x=9-x.
Applichiamo ora il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli BCH e DAK, si ha $CH^2 = BC^2 - BH^2$; $DK^2 = AD^2 - DK^2$. Poichè CH=DK, l'uguaglianza varrà anche per i loro quadrati, e quindi, per la proprietà transitiva, possiamo uguagliare i secondi membri ed avremo:

$BC^2 - BH^2 = AD^2 - DK^2$. Sostituiamo i valori $81-x^2=36-(9-x)^2$
Svolgiamo i calcoli, semplifichiamo ed otteniamo 18x=126, da cui x=7cm. Dunque HB = 7 cm.
Poichè $CH^2 =81-x^2 =81-49=32$, da cui $x=4\cdot\sqrt{2}$ (possiamo accettare solo la soluzione positiva in quanto si tratta di una lunghezza). Calcoliamo l'area $A=\frac{(15+6)\cdot 4\sqrt{2}}{2}cm^2=42\sqrt{2}cm^2$.

Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo

Ricordando che l'area di un poligono circoscrivibile ad una circonferenza, e quindi in particolare l'area di un triangolo (che è sempre circoscrivibile), si può trovare come prodotto tra il semi-perimetro e l'apotema, cioè il raggio della circonferenza inscritta, allora, applicando la formula inversa, il raggio della circonferenza inscritta sarà $r=\frac{2A}{2p}$, cioè sarà dato dal rapporto tra la doppia area ed il perimetro del triangolo.

Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo

Consideriamo i triangoli ACH, ottenuto tracciando l'altezza CH del triangolo, ed il triangolo BCD, ottenuto tracciando il diametro CD. Questi due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine, in quanto hanno entrambi un angolo retto $C\hat{H}A$ e $C\hat{B}D$ (l'angolo è retto in quanto inscritto in una semicirconferenza), gli angoli $C\hat{A}H \cong C\hat{D}B$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BC, quindi anche gli angoli $A\hat{C}H$ e $D\hat{C}B$ sono congruenti per differenze di angoli congruenti. Possiamo dunque scrivere la proporzione tra i lati omologhi CD:AC=BC:CH.

Chiamando R il raggio, sarà CD=2R, AC=b, BC=a, CH=h, sostituendo questi valori nella proporzione avremo 2R : b = a : h.

Da qui ricaviamo $R=\frac{a\cdot b}{h}$, e questa è la formula per ricavare il raggio della circonferenza circoscritta. Se poi conoscessimo solo i lati del triangolo, allora sarebbe opportuno applicare la formula che si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per il terzo lato $R=\frac{a\cdot b\cdot c}{h\cdot c}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4A}$ in quanto $A=\frac{c\,h}{2}$.

Esercizi di applicazione dell'algebra alla geometria

37 Sia ABC un triangolo con AB=7cm, BC=5cm, AC=3cm. Condurre una parallela ad AC che intersechi AB in D e BC in E. Sapendo che CE=BD, trovare il perimetro del triangolo BDE. [25/4 cm]

38 Nel trapezio ABCD, le basi misurano 5 cm e 15 cm e l'area vale 120 cm^2. Determina la distanza tra la base maggiore ed il punto di intersezione dei lati obliqui del trapezio. [18 cm]

39 Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con AB=8a. Da un punto D di AC si tracci la parallela ad AB che incontri BC in E; sia DE=6a. Sapendo che CDE e ABED sono isoperimetrici, trovare l'area di ABC. [$24a^2$]

40 Nel trapezio rettangolo ABCD circoscritto ad una circonferenza la base maggiore è 4/3 dell'altezza ed il perimetro misura 48 cm. Trovare l'area del trapezio. [$135cm^2$]

41 Sia ABC un triangolo rettangolo con il cateto AC = 32a . Sapendo che BC:AB=5:3, trovare il perimetro del triangolo. Tracciare poi la parallela ad AB, che intersechi CA in D e CB in E. Sapendo che CD è medio proporzionale tra CE ed AB, trovare l'area del trapezio ABED. [2p=96a; $A=93/2a^2$]

42 Sia ABC un triangolo isoscele di base BC=4cm e di area $40cm^2$. Dopo aver trovato la misura dell'altezza AH si tracci l'altezza CK e la si prolunghi di un segmento KD tale che l'angolo HÂD sia congruente ad uno degli angoli alla base. Dopo aver dimostrato che $C\hat{A}D$ è retto, trovare il perimetro del triangolo CAD. [AH=20cm; 2p=90cm]

43 Due lati consecutivi di un parallelogramma misurano 2a e 4a e l'angolo tra essi compreso misura 60°. Trovare la misura dell'area e delle diagonali. [$A=4a^2$; d_1 =2a; d_2 =2a]

44 Determinare perimetro ed area di un trapezio rettangolo circoscritto ad una circonferenza, sapendo che il lato obliquo è diviso dal punto di tangenza in due parti che misurano rispettivamente 4a e 9a. [2p=50a; $A=150a^2$]

45 Determinare perimetro ed area di un triangolo isoscele, sapendo che la base misura 10a e che l'angolo adiacente ad uno degli angoli alla base misura 150°. [$2p=10a(2+\sqrt{3}); A=25\sqrt{3}a^2$].

46 Nel trapezio ABCD la base maggiore AB misura 15cm e la minore CD misura 5cm. Prolungando i lati obliqui si ottiene un triangolo rettangolo. Trovare il perimetro del trapezio e del triangolo rettangolo CDE sapendo che la differenza tra le due basi è uguale alla differenza tra il doppio di BC e AD. [34cm; 12cm]

47 In un triangolo equilatero ABC con lato di lunghezza 3m, prendiamo i punti D, E e F sui lati AC, AB e BC rispettivamente, in modo che i segmenti AD e FC misurino 1m e il segmento DE sia perpendicolare a AC. Quanto misura l'area del triangolo DEF? (Giochi di Archimede 2011). [$3m^2$]

48 E' dato un trapezio isoscele avente un angolo di 45° e il lato obliquo che misura 2cm. Trovare l'area sapendo che la base minore misura $\sqrt{3}\,cm$. [$2+\sqrt{(6)}$]

49 Nella circonferenza di diametro BD sono inscritti i triangoli ABD e BDC, con A e C da parti opposte rispetto a BD. Sia H la proiezione di C su BD. Sapendo che AB=16cm e che il rapporto sia tra AD e BD sia tra BH e HD è 3/5, trovare il perimetro di ABCD. [$2p=28+5(\sqrt{6}+\sqrt{10})\,cm$]

50 Dato il segmento AB=1u, costruite, spiegando ogni passaggio, il triangolo rettangolo PQR i cui cateti PQ e PR misurano rispettivamente $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Calcolate inoltre la misura dell'ipotenusa. [$\sqrt{(5)}$]

51 Il quadrato ABCD ha il lato di 2m; costruite sul lato DC il triangolo isoscele DEC di base DC e avente $D\hat{E}C=120°$; siano F e G i punti di intersezione delle rette ED e EC con la retta AB. Determinate la misura dei lati del triangolo EFG spiegando brevemente i calcoli eseguiti.

52 E' dato il triangolo equilatero ABC; la semiretta r di origine B è interna all'angolo ABC e lo divide in due parti di cui $A\hat{B}P=45°(P=r\cap AC)$. Sapendo che la distanza di P dal lato AB è di 2m, calcolate il perimetro del triangolo equilatero dato. [$6+2\sqrt{(3)}$

53 Su ciascun lato del triangolo equilatero ABC costruite un quadrato. Sapendo che l'altezza del triangolo equilatero misura $3\sqrt{3}\,m$, determinate il perimetro e l'area dell'esagono che si forma congiungendo i vertici dei quadrati. Costruite il rettangolo equivalente all'esagono. [$18(1+\sqrt{3}); 27(4+\sqrt{3})$]

54 Nel trapezio rettangolo ABCD di base maggiore AB, l'angolo acuto di vertice B misura 45° e l'altezza è di 8m; sapendo che la base minore è 3/4 dell'altezza, determinate perimetro e area del trapezio. [$28+8\sqrt{(2)}; 80$]

55 Nel parallelogramma ABCD la diagonale minore AC è perpendicolare al lato BC e forma col lato AB un angolo di 45°. Sapendo che AC=5m, calcolate il perimetro e l'area del parallelogrammo. [$10(1+\sqrt{2}); 25/2$]

56 Il trapezio ABCD di base maggiore AB, ha $\hat{A}=45°, \hat{B}=60°$; sapendo che la base minore è uguale all'altezza che misura 12cm, determinate perimetro e area del trapezio. $[24(9+\sqrt{(3)}); 36+12\sqrt{(2)}+12\sqrt{(3)}]$

57 Il quadrilatero ABCD è spezzato dalla diagonale AC nel triangolo rettangolo isoscele ABC retto in B e nel triangolo ADC isoscele su AC, avente l'altezza DH doppia della base. Sapendo che AB=5m,

calcolate il perimetro e l'area del quadrilatero. R. $\left[10+\frac{10}{2}\sqrt{(34)};\frac{125}{2};\right]$

58 Il triangolo isoscele ABC ha l'angolo in A opposto alla base BC di 120° ed è circoscritto ad una circonferenza di raggio $OH=\sqrt{6}m$; calcolate perimetro e area del triangolo dato. $[14\sqrt{2}+8\sqrt{6};14\sqrt{3}+24]$

59 Nel triangolo ABC l'angolo in A misura 60°; sia AE la bisettrice dell'angolo A (E su BC). Sapendo che AE=8m, determinate la misura delle distanze EH ed EK del punto E rispettivamente dai lati AB e AC e il perimetro del quadrilatero AHEK. È vero che tale quadrilatero è equivalente al triangolo equilatero di lato 8m? È vero che tale quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza? Se la risposta è affermativa stabilite il suo centro e determinate la misura di detta circonferenza e l'area del cerchio.
[25,12; 50,24]

60 Nel trapezio rettangolo ABCD la base minore è metà dell'altezza. Determinate perimetro e area in funzione della misura x della base minore nei seguenti casi: a) l'angolo acuto del trapezio è di 45°; b) l'angolo acuto del trapezio è di 30°; c) l'angolo acuto del trapezio è di 60°.

61 Il triangolo ABC è rettangolo e l'angolo di vertice C misura 30°; detta AP la bisettrice dell'angolo retto, con P su BC, e sapendo che $\overline{AP}=a$, determinate in funzione di *a* perimetro e area del triangolo dato. $\left[\frac{11}{6}a\sqrt{2}+a\sqrt{6};\frac{1}{6}a^2(3+2\sqrt{3})\right]$

62 Il segmento AC è la diagonale del quadrilatero ABCD avente $A\hat{B}C=C\hat{A}D=90°$ e $B\hat{C}A=A\hat{D}C=60°$. È vero che ABCD è un trapezio rettangolo? Calcolate perimetro e area del quadrilatero sapendo che $\overline{AC}=2a$.
$$\left[a+3a\sqrt{3};\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right]$$

63 Il quadrato ABCD ha i suoi vertici sui lati del triangolo equilatero HKL (A e B appartengono a KL, C a HL e D a HK); sapendo che $\overline{AB}=3a$, calcolate il perimetro e l'area del triangolo equilatero.
$$\left[6a\sqrt{3}+9a;\frac{1}{2}(21a^2\sqrt{3}+36a^2)\right]$$

64 In un parallelogramma di area 12m², le lunghezze di due lati consecutivi sono una il doppio dell'altra e uno degli angoli interni misura 60°. Determina la lunghezza delle diagonali. $[2\sqrt[4]{27}]$

65 Nel triangolo ABC di altezza CH uguale a 8m, determina a quale distanza da C si deve condurre una parallela al lato AB in modo che il triangolo ottenuto sia equivalente alla metà di ABC. $[a\sqrt{2}]$

66 La base di un rettangolo è più lunga di 8cm dell'altezza ed è più corta di 10cm della diagonale. Calcola perimetro ed area del rettangolo. $[56+24\sqrt{10};540+168\sqrt{10}]$

67 In un triangolo equilatero BC di lato *l* individua sul lato AB un punto P tale che detti H e K i piedi delle perpendicolari condotte da P ai lati AC e BC risulti $\overline{PH}^2+\overline{Pk}^2=\overline{PC}^2+12{,}67$.

68 Un triangolo equilatero e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Quanto vale il rapporto tra le aree delle due figure? [16/9]

69 In un triangolo rettangolo ABC, retto in A, di tracci una parallela DE al cateto AB. Sapendo che l'area di DEC è i 3/4 di quella di ABC e che AC misura 1m, quanto misura DC? [3/4]

70 Costruite la seguente figura: il quadrato ABCD, il punto medio M di AB e il punto medio N di CD. Tracciare i segmenti AN BN DM CM. Siano P l'intersezione di AN con DM e Q l'intersezione di BN e CM. Che figura è MQNP? Quanti triangoli ci sono nella figura? Calcolare l'area di MQNP, l'area di uno dei triangoli ottusangoli, sapendo che il lato del quadrato è 12 cm. [36, 18]

71 Disegna un rombo con la diagonale minore lunga 6 cm e la diagonale maggiore 8 cm. Costruisci su ciascun lato del rombo un quadrato. Unisci i vertici liberi dei quadrati formando un ottagono. Calcolane l'area. Calcola anche l'area dei quattro triangoli che si sono formati. Calcola inoltre la misura degli angoli interni dell'ottagono. [12, 12, 172]

72 Disegna un quadrato ABCD e sul lato AB disegna i punti M e N in modo che AM=MN=NB. Che figura è MNCD ? Calcola il rapporto tra l'area di MNCD e l'area di ABCD. Calcola il perimetro di MNCD sapendo che l'area del quadrato è 10 cm. [0,665; 10,85]

73 Disegna un triangolo isoscele ABC di base AC di 40 mm e lato obliquo AB di 52 mm. Costruisci sulla base AC il triangolo ACD di area doppia di ABC e determina il perimetro del quadrilatero ABCD. Di che figura si tratta? [300,12]

74 Il parallelogramma ABCD ha la base AB lunga 12 cm e l'altezza di 6 cm. Disegna su AB un punto H e su CD un punto K tali che DK=BH=3 cm . Considera i due quadrilateri in cui il parallelogramma rimane diviso dal segmento HK: che quadrilateri sono? Calcolane l'area. Calcola inoltre il rapporto tra l'area di HBCD e l'aera di ABCD. [36; 0,625]

75 Calcola l'altezza del rombo avente le diagonali di 36 cm e 48 cm. Calcola l'area del trapezio equivalente al rombo, sapendo che l'altezza del trapezio è di 24 cm e che la base maggiore è il doppio della base minore.

76 Il rettangolo *R* ha base AB = 9 cm e l'altezza BC è i 4/3 di AB. Calcola il perimetro e l'area di *R*. Disegna il parallelogramma P equivalente al rettangolo R e avente la base congruente alla diagonale del rettangolo. Calcola l'altezza di P. [42cm ; 108 cm², 7,2 cm]

77 Calcola l'area del parallelogramma P di base 4,5 cm e altezza 2 cm e il lato è 5/4 dell'altezza. Disegna la diagonale AC e traccia l'altezza relativa ad AB del triangolo ABC; Calcola l'area del triangolo ABC. [11,25; 5,625]

78 I lati del triangolo ABC hanno le misure seguenti AB=21cm, BC=20cm e AC=13cm; calcola l'area del parallelogramma A'B'C'D' di base AB=A'B' e lato AC=A'C' e diagonale B'C'=BC (*ricorda la formula di Erone*). [252]

79 Dato il rombo ABCD, avente perimetro di 10cm e la diagonale maggiore di 4cm, calcola la misura della diagonale minore, l'area del rombo, l'altezza del rombo. Considera un triangolo isoscele equivalente al rombo e avente la stessa altezza del rombo. Calcolane la misura di ciascun lato. [3 cm; 6 cm^2; 2,4cm; 5 cm; 3,5 cm]

80 Un rombo ha l'area di 336 cm^2 e una diagonale uguale alla base di un triangolo di altezza 20,2cm e area 141,4cm^2. Determina il perimetro del rombo. [100cm]

81 Determina l'area del quadrato formato dai 4 vertici liberi di 4 triangoli equilateri costruiti sui lati di un quadrato di lato 3 cm. [33,59cm^2]

82 Determina l'area del rombo intersezione di due triangoli equilateri costruiti sui lati opposti di un quadrato di lato 10 cm e aventi il vertice che cade internamente al quadrato. [15,48]

83 Determina le misure degli angoli del triangolo AED formato disegnando le diagonali EA e AD di un esagono regolare ABCDEF.

84 Determina le misure degli angoli del triangolo AEC formato disegnando le diagonali EA e EC di un ottagono regolare ABCDEFGH.

85 Determina le misure degli angoli del triangolo AFC formato disegnando le diagonali AF e FC di un ottagono regolare ABCDEFGH. [45°; 67,5°]

86 La differenza tra le diagonali di un rombo è 7cm e una è 5/12 dell'altra. Determina l'area di un triangolo isoscele il cui perimetro supera di 6cm il perimetro del rombo e la cui base è 8 cm. [42,24]

87 Determinare l'area di un quadrilatero con le diagonali perpendicolari sapendo che l'una è 5/8 dell'altra e che la loro somma è 39 cm. [180]

88 Determinare la misura degli angoli di un parallelogramma sapendo che uno degli angoli alla base è 2/7 di quello adiacente.

89 In un quadrilatero un angolo è 93°8'42". Determinare l'ampiezza di ciascuno degli altri tre angoli sapendo che il secondo è 2/7 del terzo e il terzo è 4/5 del quarto. [176°13'30";50°21';40°16'48"]

90 Le dimensioni a e b di un rettangolo sono $a=\frac{3}{5}b$, il perimetro è 192 cm. Calcolane l'area. [1080]

91 In un rombo la differenza fra le diagonali è 8cm e una diagonale è i 4/3 dell'altra. Calcola area e perimetro del rombo. [384; 80]

92 In un rombo la somma delle diagonali misura 196 cm, un quarto della misura della diagonale maggiore supera di 4 cm la misura della diagonale minore. Trova perimetro, area e altezza del rombo. [328; 35,15; 2880]

93 In un trapezio rettangolo l'altezza è quadrupla della base minore e il lato obliquo è i 5/4 dell'altezza. Determina l'area del trapezio sapendo che il suo perimetro è 70 cm. [250]

94 Il perimetro di un trapezio isoscele misura 124 cm e ciascun lato obliquo è lungo 30 cm. Determinane l'area e la misura della diagonale sapendo che una sua base è 7/25 dell'altra. [768cm^2 , 40cm]

95 Determina l'area di un rettangolo sapendo che la misura della diagonale supera di 8 cm quella dell'altezza e che la differenza fra i 20/41 della diagonale e i 2/3 dell'altezza è uguale ai 14/9 della stessa altezza.

96 Il perimetro di un rettangolo misura 170 cm e l'altezza è 5/12 della base. Trovare area e diagonale del rettangolo. [1500 cm^2; 65 cm]

97 Il perimetro di un rettangolo misura 29 cm; i 2/11 dell'altezza sono uguali a 1/9 della base. Trovare l'area del rettangolo. [49,5 cm^2]

98 In un trapezio isoscele ABCD, avente le base maggiore AB, le diagonali sono fra loro perpendicolari e si intersecano in un punto P, che divide ogni diagonali in due parti in rapporto 5/12. Calcola perimetro e area del trapezio, sapendo che la diagonale misura 68 cm. [200; 2304]

99 Un triangolo rettangolo ha ipotenusa 50 cm e un cateto 48 cm. Dal punto medio dell'ipotenusa tracciare la parallela al cateto minore. Determinare l'area di ciascuna delle due parti in cui è suddiviso il triangolo [84; 252].

100 In un triangolo l'altezza è 18 cm; se conducendo una parallela alla base, si divide il triangolo in due parti la cui superficie è in rapporto 16/25, a quale distanza dal vertice è stata condotta la parallela?

101 Il triangolo ABC ha base 14 cm e altezza 6 cm. Disegna la mediana CM e calcola l'area dei triangoli AMC e MBC. Come sono i triangoli?

102 La mediana di un triangolo è 12 cm. Determinare la misura di ciascuna delle parti in cui il baricentro divide la mediana.

103 Determinare la misura di una mediana AM sapendo che BM=8cm, dove B è il baricentro del triangolo.

104 Determina la misura BM del segmento appartenente alla AM mediana in un triangolo equilatero ABC, avendo indicato con B il baricentro.

105 Determina il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa

è 8 cm e che la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è 4/3 dell'altezza data [40]

106 Determina la misura delle tre altezze del triangolo che ha i lati di 20 cm, 40cm, 30cm. (Suggerimento: Puoi ricorrere alla formula di Erone).

107 Il piede dell'altezza CH di un triangolo ABC divide la base AB di 46 cm in due parti tali che $AH=\frac{9}{14}HB$; calcola l'area dei due triangoli ACH e BCH, sapendo che AC= 24 cm. $[54\sqrt{7};84\sqrt{7}]$

108 Trova il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base è 2/3 dell'altezza e che l'area è 24 cm^2.

109 Trova il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base è 3/5 dell'altezza e che l'area è 24 cm^2.

110 I lati del triangolo ABC hanno le misure seguenti AB=63cm, BC=60cm e AC=39cm; determina le misure delle tre altezze.

111 Determinare la misura di ciascun lato e l'area del triangolo isoscele avente il perimetro di 700 m, sapendo che la base e il lato sono in rapporto $\frac{16}{17}$

[224; 238; 23520]

112 Un trapezio rettangolo ABCD è circoscritto ad una semicirconferenza con il centro O sulla base maggiore AB e raggio di misura 6 cm e siano S e T i punti in cui tale semicirconferenza tange rispettivamente il lato obliquo BC e la base minore CD. Sapendo che AB misura 16cm, calcolare le misure degli altri lati del trapezio. (Tracciare OC, OS, OT e dimostrare che OB è congruente a…). [6 cm, 10 cm, 8 cm]

113 Calcolare perimetro e area di un triangolo isoscele circoscritto a una semicirconferenza con il centro sulla sua base, sapendo che la base è i 3/2 della relativa altezza e che il raggio della semicirconferenza misura 12cm. [80cm, 300cm^2]

114 Data una circonferenza di centro O, si consideri un punto C esterno ad essa da cui si traccino le tangenti alla circonferenza stessa indicando con A e B i punti di tangenza. Sapendo che il segmento AB misura 12 cm e che l'angolo $A\hat{C}B$ ha ampiezza 60°, calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero OACB. Indicato poi con E il punto in cui la retta OB incontra la retta AC, calcolare il perimetro del triangolo BCD.

115 In un trapezio rettangolo l'angolo che il lato obliquo forma con la base maggiore ha ampiezza 60° e la diagonale maggiore dimezza tale angolo; sapendo che la base minore misura 4cm, calcolare il perimetro del trapezio. [(14 + 2√3)cm]

116 In un rombo ABCD ciascun lato misura 12cm e l'angolo in B ha ampiezza 120°. Prendere sui lati AB, BC, CD e AD del rombo rispettivamente i punti P, Q, S e T in modo che i segmenti AP, BQ, CS e DT misurino 2 cm ciascuno, calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero PQST, dopo aver dimostrato che esso è un parallelogramma. (*Tracciare da T il segmento perpendicolare ad AB e osservare i vari triangoli…, analogamente tracciare poi da P il segmento perpendicolare alla retta…*)

117 Sul lato AB di un triangolo equilatero ABC avente area uguale a 25√3 cm^2, si prenda il punto P in modo che AP misuri 4 cm; si tracci il segmento PQ parallelo a BC (con Q appartenente ad AC) e lo si prolunghi di un segmento QE congruente a PQ. Dopo aver dimostrato che il triangolo APE è rettangolo, calcolare perimetro ed area del quadrilatero CEPH, essendo H il piede dell'altezza del triango-lo ABC relativa ad AB. [(9 + 5√3 + 2√7)cm , 29√3/2 cm^2]

118 Data una semicirconferenza di centro O e diametro AB di misura 2r, si tracci la corda AC che forma con AB un angolo di 30°; si tracci quindi la tangente in C alla semicirconferenza indicando con D il punto in cui tale tangente incontra la retta AB e con E la proiezione ortogonale di B sulla tangente stessa. Calcolare le misure dei segmenti BC, CD, BE, CE, AE. (*Tracciare anche CO … osservare i vari angoli; per calcolare la misura di AE tracciare la distanza di… dalla retta…*)

119 Determina area e perimetro del quadrilatero ABCD di coordinate A(-1;7), B(6;9/2), C(4;-3), D(-4;3) [30,2; 53,75]

120 Determina area a perimetro del quadrilatero ABCD di coordinate A(0;3) ,B(3;6) C(6;3) D(-4;3). Che quadrilatero è? [22,4; 19,5]

121 Determina l'area del quadrilatero ABCD di coordinate A(-8;5) ,B(-2;11) C(2;12) D(4;3) [*A*=14]

122 Determina il quarto vertice D del trapezio ABCD di area 9, sapendo che A(-1;2) ,B(5;2) C(3;4)

123 Determina il quarto vertice D del parallelogramma ABCD con A(-3;-1) ,B(4;1) C(3;4) [D(-4;2)]

124 Verifica che il trapezio di vertici A(-1;-1) ,B(3;-2) C $\left(3;\frac{1}{2}\right)$ D $\left(0;\frac{5}{2}\right)$ non è rettangolo. Calcola l'intersezione E dei prolungamenti dei lati obliqui BC e AD. Calcola inoltre il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e CDE.

125 Verifica che il quadrilatero di vertici A(-2;-3), B(3;-2), C(4;1), D(0;3) è un trapezio e calcolane l'altezza.

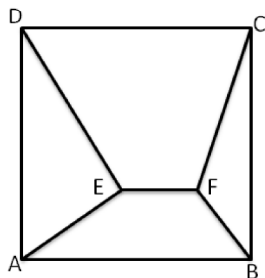
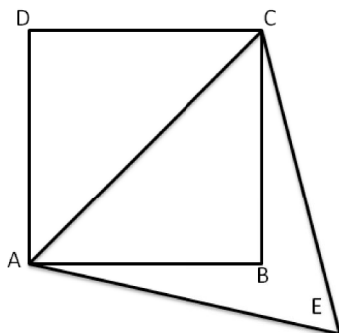
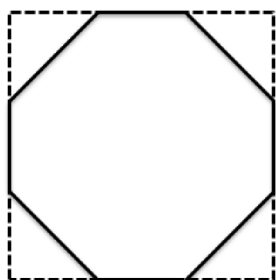
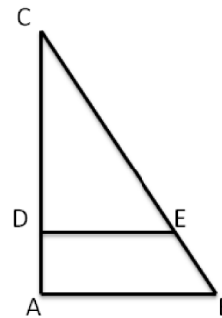
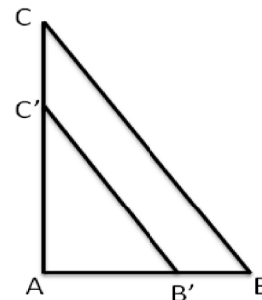
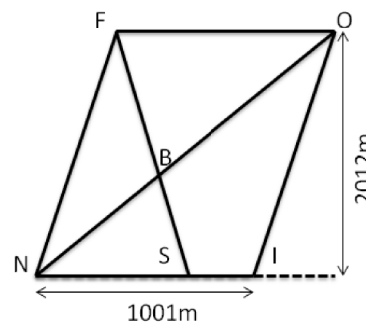
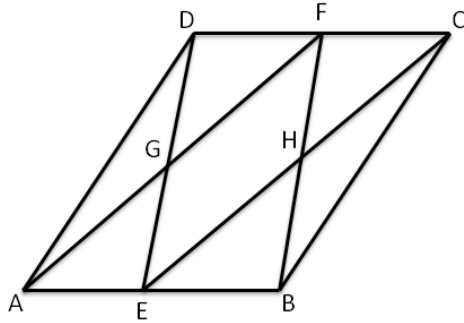
126 Verifica che il quadrilatero di vertici A(-4;1), B(5;-2), C(3;2), D(0;3) è un trapezio isoscele. Calcola l'intersezione E dei prolungamenti dei lati obliqui BC e AD. Calcola inoltre il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e CDE.

127 Nel quadrilatero ABCD le diagonali sono ortogonali tra loro e gli angoli in B e in D sono retti. Inoltre AB=AD=20cm, BC=CD=30cm. Calcolare il raggio della circonferenza inscritta in ABCD. (*Giochi di Archimede 2011*). [12cm]

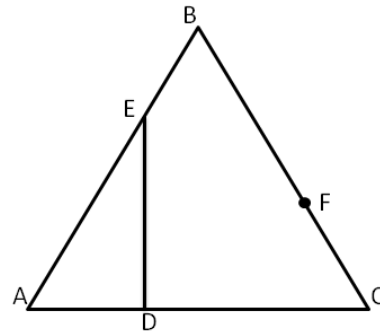
128 Sia dato un quadrato ABCD di lato unitario e sia P un punto interno ad esso tale che l'angolo $A\hat{P}B$ misuri 75°. Quanto vale la somma delle aree dei triangoli ABP CDP? (*Giochi di Archimede 2003*)

129 Un parallelogramma di lati 1 e 2 ha un angolo di 60°. Quanto misura la sua diagonale minore? (*Giochi di Archimede 2003*)

130 In un triangolo ABC scegliamo un punto D su AB e un punto E su AC in modo che la lunghezza di AD sia un terzo di quella di AB e la lunghezza di AE sia un terzo di quella di AC. Sapendo che l'area del triangolo ADE è $5m^2$, determinare l'area del quadrilatero BCED. *Giochi di Archimede 2007*.

131 Il quadrato ABCD disegnato a fianco ha il lato lungo 3m. Il segmento EF è lungo 1m ed è parallelo ad AB. Quanto vale l'area dell'esagono ABFCDE? *Giochi di Archimede 2007.*

132 Nella figura ABCD è un quadrato avente la diagonale lunga 2cm e AEC è eequilatero. Quanto vale l'area del quadrilatero AECB? (*Giochi di Archimede 2007*).

133 Da un quadrato di lato 10 cm si tagliano i quattro angoli inmodo da ottenere un ottagono regolare. Quanto è lungo il lato dell'ottagono? (*Giochi d'Autunno 2010*)

134 Nella figura, il segmento DE è parallelo ad AB. Sapendo che l'area di DEC è uguale ai 3/4 di quella di ABC e che AC misura 1 m, quanto misura DC? (*Giochi di Archimede 2006*)

135 Il triangolo ABC è rettangolo edd i cateti AB e AC misurano 3 m e 4 m rispettivamente. Siano B' e C' punti appartenenti ai lati AB e AC rispettivamente, tali ce la retta contenente il segmento B'C' sia parallela a quella contenete il segmento BC e distante 1 m da essa (vedi figura), Calcolare l'area del triangolo AB'C'. (*Giochi di Archimede 2005*)

136 L'area di un bosco. La figura di vertici F, O, I, N è un parallelogramma la cui base misura 1001 m e la cui altezza misura 2012m. Il punto S si trova sulla base N1 a 143m dal vertice I. Qual è l'area del qudrilatero BOIS? (*Giochi d'Autunno 2011*)

137 Nel parallelogramma ABCD in figura il segmento BD è perpendicolare ad AB ed E e F sono i punti medi di AB e CD rispettivamente. Calcolare l'area del quadrilatero GEHF, sapendo che AB=5cm e BD=2cm. (*Giochi d'Autunno 2011*)

138 In un triangolo due angoli misurano rispettivamente 30° e 105° ed il lato tra essi compreso è lungo 2cm. Qual è la misura del perimetro del triangolo? (*Giochi d'Autunno 2010*)

139 In un parallelogramma di area 1 m^2 le lunghezze di due lati consecutivi sono una il doppio dell'altra. Inoltre uno degli angoli interni misura 60°. Quanto misura la diagonale minore? (*Giochi d'Autunno 2011*)

140 In un triangolo equilatero ABC con lato di lunghezza 3 m, prendiamo i punti D, E e F sui lati AC, AB e BC rispettivamente, in modo che i segmenti AD e FC misurino 1 m e il segmento DE sia perpendicolare a AC. Quanto misura l'area del triangolo DEF? (*Giochi d'Autunno 2010*)

141 Dato un quadrato ABCD si uniscono i punti medi dei lati aventi un vertice in comune formando un nuovo quadrato EFGH. Ripetiamo la stessa operazione per EFGH e otteniamo un nuovo quadrato A'B'C'D'. Quanto vale il rapporto tra l'area di ABCD e l'area di A'B'C'D'? (*Giochi di Archimede 2005*)

MATEMATICA C3 – GEOMETRIA
9. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

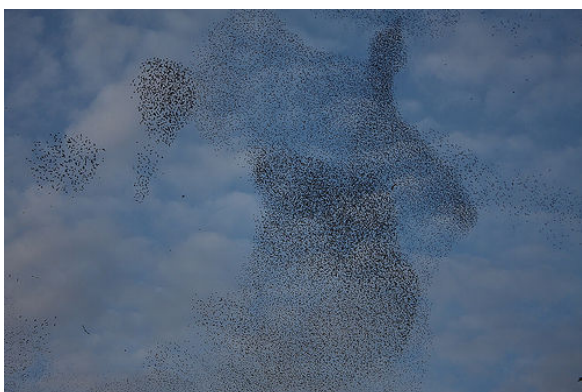
La danza degli storni, foto di _Pek_
http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536

Indice

►1. Generalità sulle trasformazioni geometriche piane

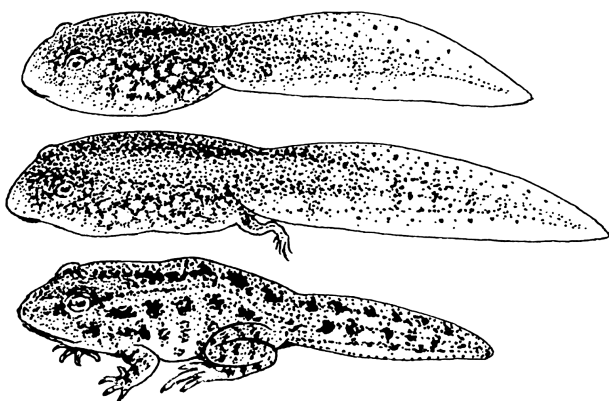
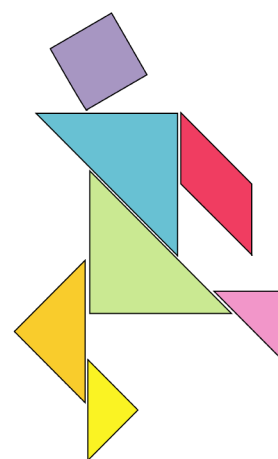
Introduzione e definizioni

“C’è una cosa straordinaria da vedere a Roma in questa fine d’autunno ed è il cielo gremito d’uccelli. Il terrazzo del signor Palomar è un buon punto d’osservazione… Nell’aria viola del tramonto egli guarda affiorare da una parte del cielo un pulviscolo minutissimo, una nuvola d’ali che volano… Quando si pensa agli uccelli migratori ci si immagina di solito una formazione di volo molto ordinata e compatta... Questa immagine non vale per gli storni, o almeno per questi storni autunnali nel cielo di Roma…” [Italo Calvino, *Palomar*]

Il volo di questi uccelli disegna nel cielo figure in continua **trasformazione**, come potete vedere nelle foto.

La danza degli storni, foto di _Pek_
http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536

Auklet flock, Shumagins, foto di pubblico dominio
fonte http://digitalmedia.fws.gov/

Il concetto di trasformazione assume significati diversi a secondo dell’ambito in cui è definito: ad esempio in zoologia la trasformazione di un animale dallo stadio di larva allo stadio di adulto è più propriamente chiamata “metamorfosi”. Ciò provoca un cambiamento totale del corpo del giovane e l'adulto quasi sempre avrà una forma molto differente da quella della larva.

Il gioco del Tangram si basa sulla capacità di passare da una figura ad un’altra senza che nessun pezzo del quadrato base venga tagliato o modificato nelle sue dimensioni: le figure che si ottengono hanno forme diverse, ma sono costituite dagli stessi pezzi. Possiamo dire che sono trasformate le une nelle altre grazie alla nostra fantasia.

Line art representation of w:Tadpole, pubblico dominio
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Tadpo le_%28PSF%29.png

Tangram, immagine di Actam pubblico dominio
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons /thumb/7/7a/Tangram-man.svg/2000px-angram-man.svg.png

In geometria si definiscono le trasformazioni come particolari corrispondenze aventi come dominio e codominio il piano considerato come insieme di punti e precisamente si enuncia la:

DEFINIZIONE. **Trasformazione geometrica piana** è una corrispondenza biunivoca tra punti del piano; attraverso una legge ben definita la corrispondenza associa ad un punto P del piano uno e un solo punto P' dello stesso piano e, viceversa, il punto P' risulta essere il corrispondente di un solo punto P del piano. Diciamo che **P' è l'immagine di P** nella trasformazione.

Indicata con Φ la legge della corrispondenza, per esprimere il legame tra P e P' scriveremo: $\Phi: P \rightarrow P'$ o anche $P \overset{\Phi}{\rightarrow} P'$ e leggeremo: **in Φ al punto P corrisponde il punto P'**, oppure $\Phi(P)=P'$ e leggeremo: **Φ di P è uguale a P'** , scrittura che definisce la trasformazione geometrica come funzione del punto preso in considerazione.

DEFINIZIONE. La trasformazione fa corrispondere ad una figura Ω del piano la figura Ω' costituita dalle immagini dei punti della figura iniziale: Ω' si definisce **immagine di Ω in Φ** e scriveremo: $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ o anche $\Omega \overset{\Phi}{\rightarrow} \Omega'$ o ancora $\Phi(\Omega)=\Omega'$

Le trasformazioni geometriche che noi studieremo sono tali da far corrispondere ad una retta r la retta r' individuata dai punti A' e B' immagine di due punti A e B scelti arbitrariamente su r. Tali trasformazioni sono chiamate **collineazioni**.

DEFINIZIONE. Si chiama **punto unito o fisso** nella trasformazione il punto che coincide con la sua immagine. Se tutti i punti del piano coincidono con la propria immagine la trasformazione è l'**identità**.

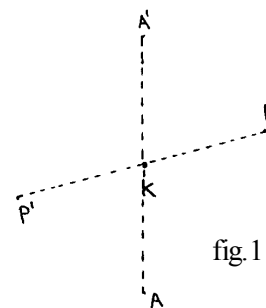
Per descrivere una trasformazione geometrica dobbiamo definire come si costruisce l'immagine di un qualunque punto del piano.

Esempio

Consideriamo nel piano la seguente corrispondenza: fissato un punto K la corrispondenza S_K associa ad ogni punto P del piano il punto P' dello stesso piano tale che K risulti il punto medio del segmento PP'. S_K è una trasformazione geometrica?

La definizione è costruttiva:

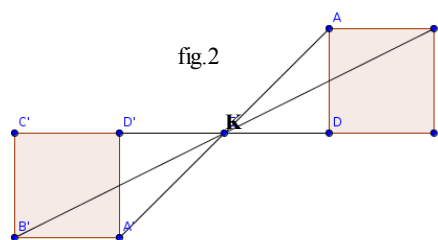
$P \overset{S_K}{\rightarrow} P' \wedge PK \cong KP'$ $A \overset{S_K}{\rightarrow} A' \wedge AK \cong KA'$

fig.1

Per dimostrare che la corrispondenza è una trasformazione geometrica dobbiamo verificare che si tratta di una corrispondenza biunivoca tra punti del piano: ogni punto ha un corrispondente in S_K e viceversa ogni punto è immagine di un solo punto del piano stesso. Il punto K è corrispondente di se stesso dunque è un punto unito della trasformazione, anzi è l'unico punto unito. (fig.1)

Nella figura 2 è rappresentato come opera la trasformazione **S_K** se applicata ad un quadrato

$AK \equiv KA'$; $BK \cong KB'$; $CK \cong KC'$; $DK \cong KD'$

$ABCD \overset{S_K}{\rightarrow} A'B'C'D'$ e i due quadrati hanno le stesse dimensioni.

fig.2

Esempio

Definiamo una trasformazione geometrica Φ sul punto P: dato un punto O, tracciamo la semiretta uscente da O e passante per P; il punto P' trasformato di P è un punto della semiretta tale che OP'=2OP.

Applico questa trasformazione al quadrato ABCD. (fig. 3)

Il quadrato si trasforma in un altro quadrato; i due quadrati non hanno le stesse dimensioni.

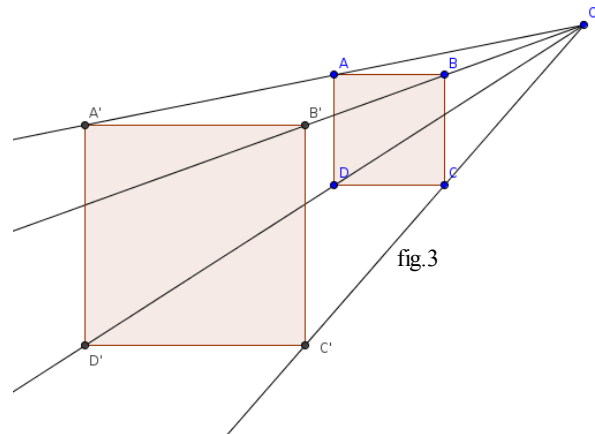



fig.3

Se il piano è dotato di riferimento cartesiano ortogonale la legge della trasformazione geometrica piana lega le coordinate di un punto e quelle del suo corrispondente mediante equazioni o sistemi di equazioni.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **equazione della trasformazione** le espressioni algebriche che indicano come si passa dalle coordinate di un punto a quelle della sua immagine.

Esempio

La corrispondenza Φ associa ad un punto P del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale il punto P' secondo la seguente legge:

$\Phi : P(x_P, y_P) \rightarrow P'(-2x_p, x_P - y_P)$. La corrispondenza assegnata è una trasformazione geometrica piana?

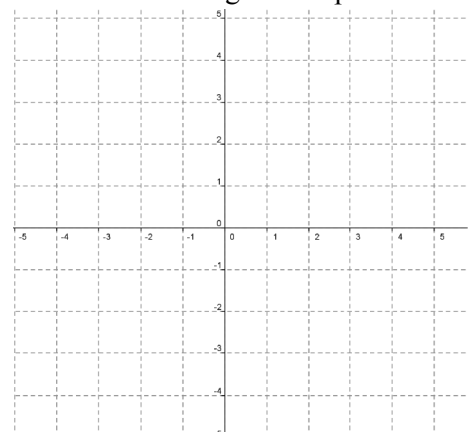
STRATEGIA RISOLUTIVA:

scelgo un punto del piano: P (…, …) e determino P'(…, …)

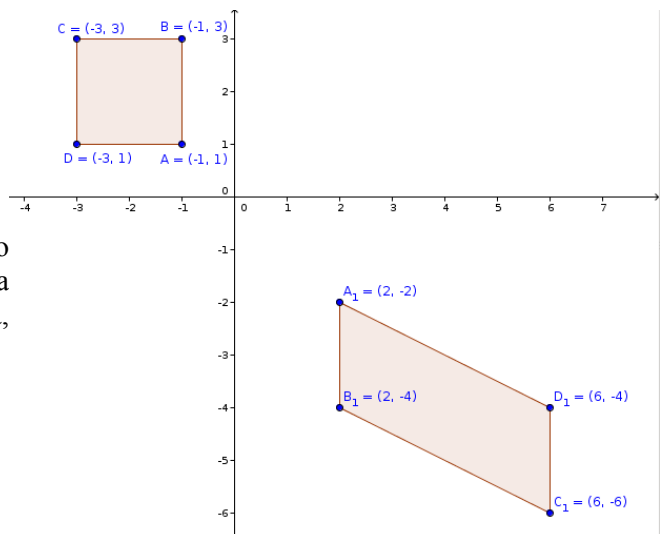
scelgo un punto Q'(…, ...) e determino la controimmagine Q(…, …)

posso affermare che la corrispondenza è biunivoca perché

… …

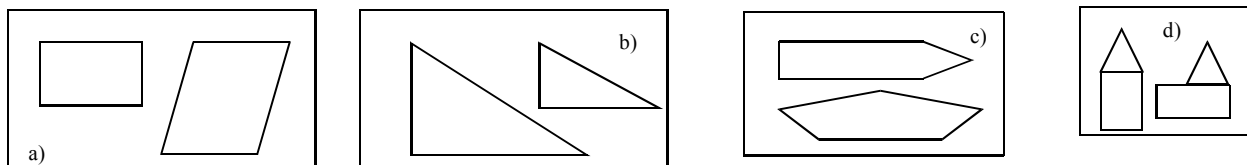
e quindi posso affermare che è una trasformazione geometrica.

Applichiamo la stessa trasformazione al quadrato di vertici A(-1;1) , B (-1;3) , C (-3;3) , D (-3;1) (vedi fig. 4)

Questa trasformazione fa corrispondere al quadrato ABCD il parallelogramma $A_1B_1C_1D_1$. Essa ha cambiato la natura della figura geometrica di partenza, ma ha mantenuto il parallelismo tra i lati:

$$\begin{cases} AB // CD \\ \Phi(AB)=A_1B_1 ; \Phi(CD)=C_1D_1 \end{cases} \rightarrow A_1B_1 // C_1D_1$$

Si noti come ci sono trasformazioni geometriche che mantengono invariate forma e dimensioni delle figure a cui sono applicate, altre che mantengono inalterate forme ma non dimensioni, altre ancora che non mantengono neppure la forma.

DEFINIZIONE: Si chiamano **proprietà invarianti di una trasformazione** le caratteristiche che una figura e la sua corrispondente mantengono inalterate nella trasformazione.

Le principali caratteristiche che una trasformazione può lasciare inalterate sono: la lunghezza dei segmenti, l'ampiezza degli angoli, il rapporto tra segmenti, la misura della superficie, il parallelismo, l'orientamento dei punti del piano, la direzione della retta, la forma, il numero di lati.

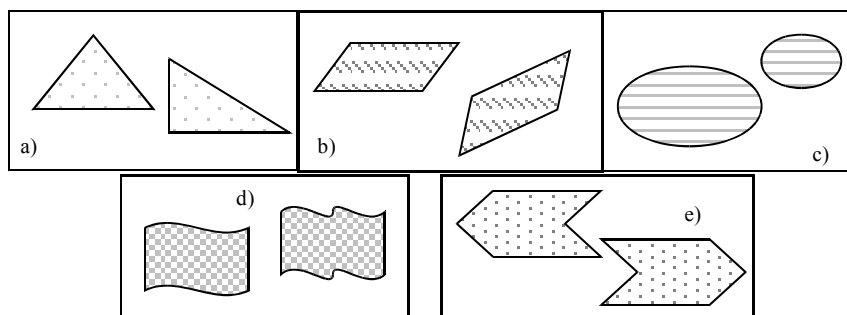
1 Le figure delle seguenti coppie si corrispondono in una trasformazione geometrica piana: associate a ciascuna coppia di figure la caratteristica che rimane immutata nella trasformazione, ossia individuate l'invariante o gli invarianti della trasformazione:

2 Si sa che una trasformazione geometrica muta un quadrato in un rombo; gli invarianti di questa trasformazione sono:

[A] il parallelismo dei lati e l'ampiezza degli angoli
[B] l'ampiezza degli angoli e la misura dei lati
[C] solo il parallelismo dei lati
[D] il parallelismo dei lati e la perpendicolarità delle diagonali

In questo capitolo tratteremo solo delle trasformazioni che mantengono invariate forma e dimensioni.

DEFINIZIONE. Si chiama **isometria** una trasformazione piana che associa a due punti A e B del piano i punti A' e B' tali che **AB e A'B' risultano congruenti**.

Solo il primo esempio, tra i precedenti, rappresenta una isometria. Per dimostrare che è una isometria dobbiamo dimostrare che segmenti corrispondenti sono congruenti. Consideriamo il segmento AP e il suo corrispondente A'P'; dimostriamo che AP≅A'P'. Considero i triangoli AKP e A'KP', hanno … … … ...
Lasciamo al lettore lo sviluppo della dimostrazione.

3 Quali coppie sono formate da figure corrispondenti in una isometria?

R. [b) ; e)]

Proprietà

In una isometria:

- L'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente.
- A rette parallele corrispondono rette parallele.
- A rette incidenti corrispondono rette incidenti.
- Ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

DEFINIZIONE. Una **retta** è **unita** in una isometria Σ se coincide con la sua immagine, cioè ogni punto della retta data ha come corrispondente un punto della stessa retta.

Può succedere che ogni punto di una retta sia un punto unito: in tal caso la **retta unita è luogo di punti uniti o retta fissa.**

A B A' B'

r ≡ r'

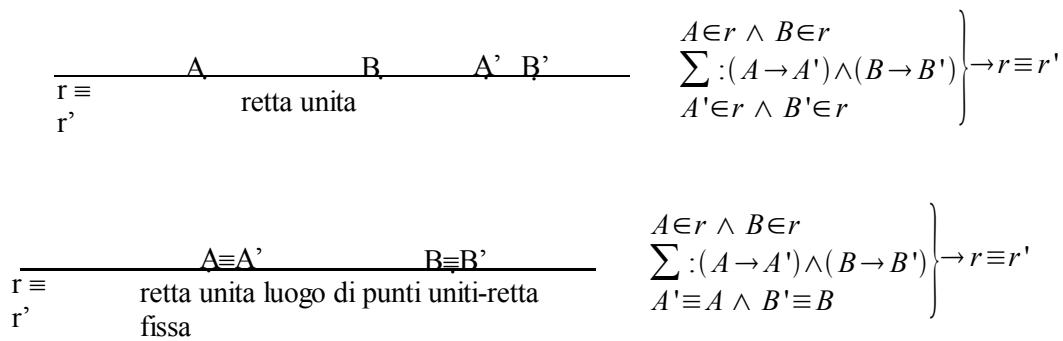
retta unita

$$\left.\begin{array}{l} A\in r \wedge B\in r \\ \sum :(A\rightarrow A')\wedge(B\rightarrow B') \\ A'\in r \wedge B'\in r \end{array}\right\}\rightarrow r\equiv r'$$

A≡A' B≡B'

r ≡ r'

retta unita luogo di punti uniti-retta fissa

$$\left.\begin{array}{l} A\in r \wedge B\in r \\ \sum :(A\rightarrow A')\wedge(B\rightarrow B') \\ A'\equiv A \wedge B'\equiv B \end{array}\right\}\rightarrow r\equiv r'$$

►2. Le isometrie

Riprendiamo la definizione del paragrafo precedente:
Si chiama isometria una trasformazione piana che associa a due punti A e B del piano i punti A' e B' tali che AB e A'B' risultano congruenti.

Richiamiamo anche le proprietà:

- l'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

Ci proponiamo di studiare particolari isometrie.

La simmetria centrale

DEFINIZIONE. Fissato nel piano un punto K, chiamiamo **simmetria centrale di centro K** (*indicata col simbolo* S_K) la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che K risulti il punto medio del segmento PP'.

Per determinare l'immagine di un segmento basta determinare l'immagine dei suoi estremi. Nella figura1 è illustrato come agisce SK su una qualunque figura piana: l'immagine del triangolo BCD è il triangolo B'C'D' ottenuto determinando l'immagine di ciascuno dei suoi vertici.

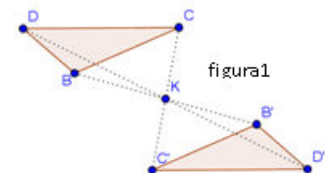



figura1

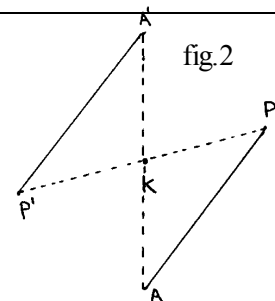
TEOREMA 1. **Dimostrate che S_K è una isometria.**

Fissato K, centro di simmetria, per la dimostrazione servitevi della figura 2.

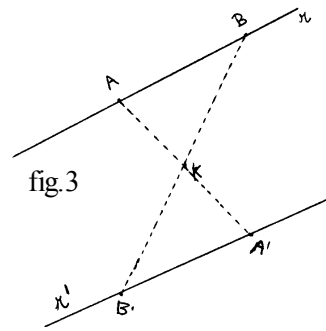
Ipotesi: $A \xrightarrow{S_K} A';\ P \xrightarrow{S_K} P' \rightarrow PK \cong P'K;\ AK \cong A'K$

Tesi: AP≅A'P'

Lasciamo al lettore la dimostrazione.

fig.2

TEOREMA 2. **Dimostrate che rette corrispondenti in S_K sono parallele.**

Osserviamo che per determinare l'immagine r' di una retta r in S_K basta costruire l'immagine A' e B' di due suoi punti A e B. Per la costruzione effettuata si ha $AK \equiv KA'$ e $BK \equiv KB'$, per la dimostrazione del Teorema 1 abbiamo ottenuto $AKB \equiv A'KB'$ dunque in particolare $A\hat{B}K \equiv A'\hat{B}'K$. Questi sono angoli alterni interni delle rette r ed r' con trasversale BB' che pertanto risultano parallele.

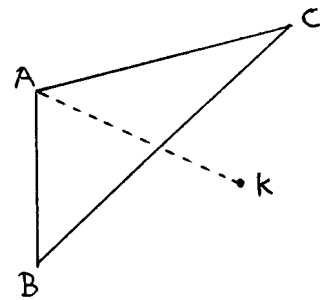
fig.3

Gli elementi uniti

- l'unico punto unito è il centro di simmetria.

- sono unite tutte le rette passanti per il centro di simmetria.

Lasciamo al lettore la verifica di quest'ultima proposizione

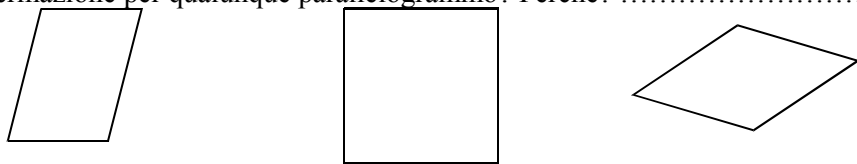
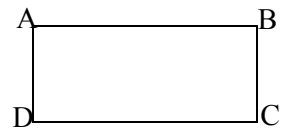
4 Completate la costruzione del simmetrico del triangolo ABC in S_K. Immaginate di percorrere il contorno di ABC partendo dal vertice A e procedendo in ordine alfabetico: state ruotando in senso orario o antiorario? …….. In quale senso percorrete il contorno di A'B'C' partendo da A'? …………

Questo fatto ci permette di concludere che S_K mantiene l'orientamento dei punti: **è una isometria diretta**.

5 Presi due punti T e T' nel piano è vero che possiamo individuare la simmetria centrale in cui T' è immagine di T?

6 Come dobbiamo scegliere due segmenti affinché sia possibile determinare una simmetria centrale in cui essi siano corrispondenti?

7 Nel rettangolo ABCD indicate con O il punto d'incontro delle diagonali; determinate l'immagine di ABCD nella simmetria di centro O. Completate:

$S_O : ABCD \to$ .... pertanto il **rettangolo è una figura unita** nella simmetria avente come centro il punto d'intersezione delle sue diagonali.

Vale la stessa affermazione per qualunque parallelogrammo? Perché? ………………………..

DEFINIZIONE: Si dice che una figura **F ha un centro di simmetria** se esiste nel piano un punto K tale che nella simmetria di centro K, F coincide con la sua immagine F'. **F è unita in S_K**.

8 Anche in natura si presentano elementi dotati di un centro di simmetria: cercate una foto di un fiore che presenta un centro di simmetria e individuate il centro di simmetria.

Descrizione analitica di una simmetria centrale

DEFINIZIONE. Fissate le coordinate del centro di simmetria, chiamiamo **equazione di una simmetria centrale** le relazioni che legano le coordinate del punto P con le coordinate della sua immagine P'.

Sia $K(x_K, y_K)$ il centro di simmetria, $P(x, y)$ il generico punto di cui vogliamo determinare il corrispondente $P'(x', y')$. Ricordiamo la definizione di simmetria centrale: K risulta il punto medio di PP'. Sappiamo che le coordinate del punto medio M di un segmento AB si ottengono dalle coordinate dei suoi estremi $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$; nel nostro caso si dovrà avere $\begin{cases} x_K = \frac{x+x'}{2} \\ y_K = \frac{y+y'}{2} \end{cases}$ da cui possiamo

ricavare l'equazione cercata: le coordinate del punto immagine $P'(x', y')$ sono date dall'equazione $\begin{cases} x'=2x_k-x \\ y'=2y_k-y \end{cases}$.

Esempio

Determinare il simmetrico di $P(-1,3)$ nella simmetria centrale di centro $K(1,-1)$.
Riportiamo K e P nel riferimento cartesiano ortogonale, scriviamo l'equazione della simmetria: $\begin{cases} x'=2-x \\ y'=-2-y \end{cases}$ e determiniamo le coordinate di $P'(3,-5)$.

9 Sappiamo che $S_K: P\left(\frac{3}{5},0\right) \rightarrow P'\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)$, determinate il centro k della simmetria.

10 Il segmento di estremi $A(-2,4)$ e $B(2,-4)$ in S_O, essendo O l'origine del riferimento cartesiano ortogonale,
[A] ha tutti i suoi punti fissi [B] ha un solo punto fisso [C] ha fissi solo gli estremi
[D] ha fissi tutti i punti interni ma non gli estremi [E] non ha punti fissi

11 Sono assegnati i punti $A(-5,0)$, $B(0,5)$, $C(1,-1)$; determinate le coordinate dei vertici A', B', C' del triangolo immagine di ABC nella simmetria avente come centro il punto medio M del lato AC.

12 I punti $A(1,5)$, $B(-2,2)$, $C(0,-4)$ sono tre vertici di un parallelogrammo. Determinate le coordinate del quarto vertice. Indicate con M il punto d'incontro delle diagonali; in S_M il parallelogrammo $ABCD$ è fisso o unito? Perché?

13 Sappiamo che l'equazione di una simmetria centrale di centro $C(p,q)$ è $\begin{cases} x'=2p-x \\ y'=2q-y \end{cases}$; note le coordinate di un punto $P(x,y)$ e della sua immagine $P'(x',y')$ le coordinate del centro sono:

[A] $p=x'+x \quad q=y'+y$
[B] $p=x-\frac{1}{2}x' \quad q=y-\frac{1}{2}y'$
[C] $p=2(x'+x) \quad q=2(y'+y)$
[D] $p=\frac{1}{2}(x'+x) \quad q=\frac{1}{2}(y'+y)$
[E] $p=\frac{1}{2}(x'-x) \quad q=\frac{1}{2}(y'-y)$

14 Verificate che i tre punti $A(3,2), B(7,-2), C(5,0)$ sono allineati. È vero che C è il centro della simmetria che fa corrispondere al punto A il punto B?
(Ricorda che puoi verificare l'allineamento verificando che $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$)

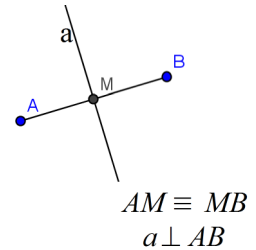
15 Il centro della simmetria che associa al triangolo di vertici $A(0,4), B(-2,1), C(1,5)$ il triangolo di vertici $A'(2,-2), B'(4,1), C'(1,-3)$ è:
[A] $K(-1,1)$ [B] $K(1,-1)$ [C] $K(1,1)$ [D] $K(-1,-1)$

16 Determinate l'immagine M' del punto medio M del segmento AB di estremi $A(0,5)$ e $B(-4,1)$ in S_O (O è l'origine del riferimento). È vero che $BM'A$ è isoscele sulla base AB?

17 Determinate la natura del quadrilatero $ABA'B'$ che si ottiene congiungendo nell'ordine i punti $A(-1,1)$, $B(-4,-5)$, A' e B' rispettivamente simmetrici di A e B in S_O. Determinate la misura delle sue diagonali.

2.2 La simmetria assiale

Ricordiamo la

DEFINIZIONE. L'**asse di un segmento** AB è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio M.

Studiamo una nuova corrispondenza tra punti del piano:

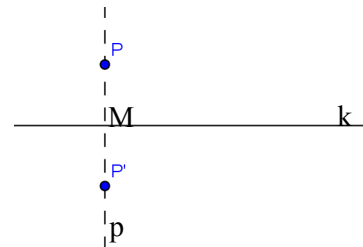
DEFINIZIONE. Fissata nel piano una retta k, chiamiamo **simmetria assiale di asse k** (*indicata col simbolo* S_k) la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che k risulti l'asse del segmento PP'.

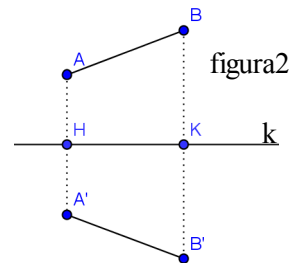
Per costruire il corrispondente di un punto P del piano procedete con i seguenti passi:

1. fissate l'asse di simmetria k
2. prendete un punto P del piano non appartenente a k
3. da P tracciate la perpendicolare p all'asse k e ponete $M = p \cap k$
4. il corrispondente P' di P si trova su p nel semipiano opposto e $P'M \cong PM$

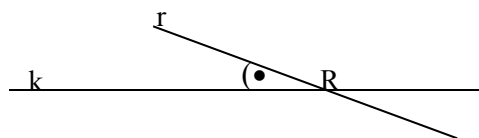
Avrete costruito una figura simile a quella accanto:
Lasciamo al lettore le verifiche delle seguenti affermazioni circa gli elementi uniti.

GLI ELEMENTI UNITI

- ogni punto dell'asse k è unito
- l'asse k è luogo di punti uniti, ossia è una retta fissa
- sono unite tutte le rette perpendicolari all'asse k

TEOREMA 1

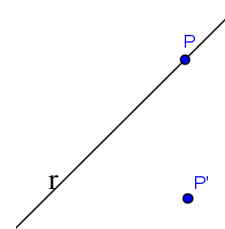
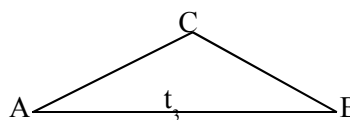
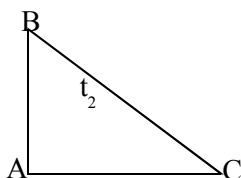
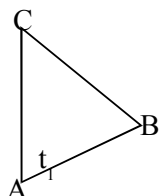
Dimostrate che $\mathbf{S_k}$ è una isometria.
Strategia risolutiva:
Dovrete dimostrare che l'immagine di un segmento AB è il segmento A'B' tale che A'B'≅AB; servitevi della figura2 per la dimostrazione, ma prima indicate
Ipotesi: ....
 Tesi A'B'≅AB
Suggerimento per la dimostrazione: tracciate la distanza da A e da A' a BB' e dimostrate la congruenza dei triangoli ottenuti ....

TEOREMA 2

Dimostrate che se r è una retta del piano che interseca l'asse k in R allora la sua immagine r' in $\mathbf{S_k}$ passa per R. Dimostrate inoltre che k risulta la bisettrice dell'angolo di vertice R avente come lati r ed r'.

Ipotesi: k asse di simmetria
 $R = r \cap k$
Tesi:
 $R = r' \cap k\ ;\ r\hat{R}k \cong k\hat{R}r'$

Dimostrazione:
Per costruire r' costruiamo i simmetrici in $\mathbf{S_k}$ di due punti scelti su r. Possiamo usare il punto R e poi un altro qualunque A. Si ottiene $S_K:\ R \rightarrow ......$ perché .... e $S_K:\ A \rightarrow ......$
Congiungendo i punti immagine si ottiene r'.
Concludete ....
E continuate dimostrando la seconda tesi richiesta.

TEOREMA 2.1
Dimostrate che se r è parallela all'asse di simmetria allora anche r' risulta parallela all'asse.

18 Nel piano sono assegnati i punti T e T' corrispondenti in una simmetria assiale. Come potete determinare l'asse di simmetria?

19 Nel piano è assegnata la retta r e un suo punto P e un punto P' non appartenente ad r. Costruisci la retta r' immagine di r nella simmetria assiale che fa corrispondere al punto P il punto P'.

20 Costruite l'immagine di ciascun triangolo ABC della figura nella simmetria avente come asse la retta del lato AC.

Percorrete il contorno del triangolo assegnato seguendo l'ordine alfabetico delle lettere ai vertici: in t_1 il percorso è stato in senso orario/antiorario, in t_2 in senso orario/antiorario, in t_3 in senso orario/antiorario. Cosa succede percorrendo il contorno dei triangoli immagine?
Questo fatto ci permette di concludere che $\mathbf{S_k}$ non mantiene l'orientamento dei punti: **è una isometria invertente**.

21 Nel triangolo isoscele ABC di base BC considerate la retta r passante per A e perpendicolare a BC; costruite l'immagine di ABC nella simmetria di asse r. Stabilite quale proposizione è vera:
[A] il triangolo è <u>fisso</u> nella simmetria considerata
[B] il triangolo è <u>unito</u> nella simmetria considerata

22 Assegnato il quadrato ABCD, determinate la sua immagine nella simmetria avente come asse la retta della diagonale AC. Stabilite quale proposizione è vera:
[A] il quadrato è <u>fisso</u> nella simmetria considerata
[B] il quadrato è <u>unito</u> nella simmetria considerata

DEFINIZIONE. Si dice che una figura **F ha un asse di simmetria** se esiste nel piano una retta k tale che nella simmetria di asse k F coincide con la sua immagine F'. **F è unita in** $\mathbf{S_k}$

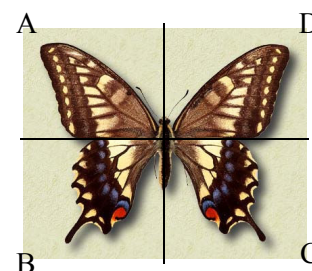
23 Motivate la verità delle proposizioni
- p_1: "il quadrato possiede 4 assi di simmetria" ,
- p_2: "il triangolo equilatero possiede 3 assi di simmetria"

24 Dimostrate che la retta di un diametro è asse di simmetria per la circonferenza. Potete concludere che la circonferenza possiede infiniti assi di simmetria?

25 Tra i trapezi ne trovate uno avente un asse di simmetria? Qual è l'asse di simmetria?

26 Quali lettere dell'alfabeto, tra quelle proposte hanno un asse di simmetria?

27 Perché la retta che congiunge i punti medi dei lati obliqui di un trapezio isoscele non è un suo asse di simmetria?

28 "Le due rette tracciate sono assi di simmetria del rettangolo ABCD e pertanto anche della immagine in esso contenuta."
VERO o FALSO ?

Descrizione analitica di una simmetria assiale

DEFINIZIONE. Fissata nel riferimento cartesiano ortogonale una retta k, chiamiamo **equazione della simmetria assiale di asse k** (S_k) le relazioni che legano le coordinate del punto P con le coordinate della sua immagine P' .

Limitiamo la ricerca dell'equazione della simmetria assiale fissando come asse particolari rette; proseguendo negli studi saprete determinare l'equazione di una simmetria assiale con asse una qualunque retta del piano cartesiano.

Simmetria rispetto agli assi coordinati

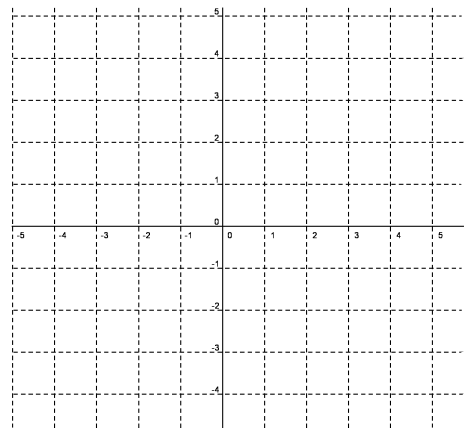
29 Studiate la corrispondenza tra punti del piano cartesiano espressa dal seguente predicato:

$$\Phi:\ P(x_P, y_P) \rightarrow P'(x_P, -y_P)$$

Completate la tabella:

$\Phi:\ P(x_P, y_P) \rightarrow P'(x_P, -y_P)$			
x	y	x'	y'
-3	1		
0	-2		
1	0		
4	5		

E rappresentate nel riferimento cartesiano ciascun punto e il suo corrispondente.

Completate: $\begin{cases} x' = \dots\dots \\ y' = \dots\dots \end{cases}$

Motivate la verità delle seguenti proposizioni:

" ogni punto del piano ha un unico corrispondente"

… … … … … … … … … … … … … … … … …

"di ogni punto del piano si può determinare la controimmagine" … … … … … … … … … ...

"la corrispondenza è una trasformazione geometrica" … … … … … … … … … … … …. …

"i punti dell'asse x sono fissi" …

"la corrispondenza è una isometria" … … … … … … … … … … … … … …. … … … …

DEFINIZIONE. L'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa ascissa e ordinata opposta è la **simmetria assiale di asse x** (S_x) **di equazione** $S_x:\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

30 Ripetete il procedimento seguito studiando la corrispondenza: $\Phi:\ P(x_P, y_P) \rightarrow P'(-x_P, y_P)$ e concludete la

DEFINIZIONE. L'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa ……… e …………. opposta è la **simmetria assiale di asse …….** ($S_{...}$) **di equazione** $S_{...}:\begin{cases} x' = \dots\dots \\ y' = \dots\dots \end{cases}$

31 In S_x il segmento AB di estremi A(3,2) e B(3,-2)

[A] è unito luogo di punti uniti

[B] non ha punti fissi

[C] ha tutti i suoi punti uniti tranne A e B

[D] ha un solo punto fisso

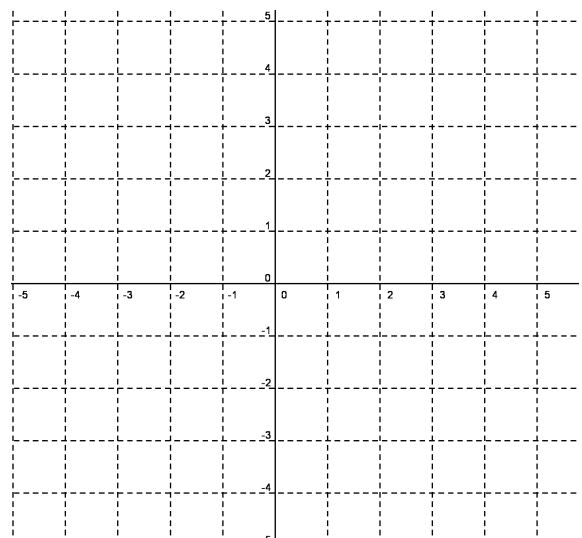
[E] ha solo A e B fissi

32 Dimostrate che un qualunque segmento MN di estremi M(a,b) e N(c,d) ha come corrispondente sia nella simmetria avente come asse l'asse x, sia nella simmetria avente come asse l'asse y, il segmento M'N' tale che MN≅M'N'.

Ipotesi: S_x	Tesi:	Ipotesi: S_y	Tesi:
M(a,b) ; N(c,d)	MN≅M'N'	M(a,b) ; N(c,d)	MN≅M'N'
$S_x:(M\to M')\wedge(N\to N')$		$S_y:(M\to M')\wedge(N\to N')$	
Dimostrazione:		Dimostrazione:	
determino $\overline{MN}=$…………		determino $\overline{MN}=$…………	
trovo M'(……,…..) e N'(…..,…..)		trovo M'(……,…..) e N'(…..,…..)	
determino $\overline{M'N'}=$…………		determino $\overline{M'N'}=$…………	
concludo: ……………………….		concludo: ……………………….	

33 Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che A(0,4), B(-2,0) e l'asse x è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

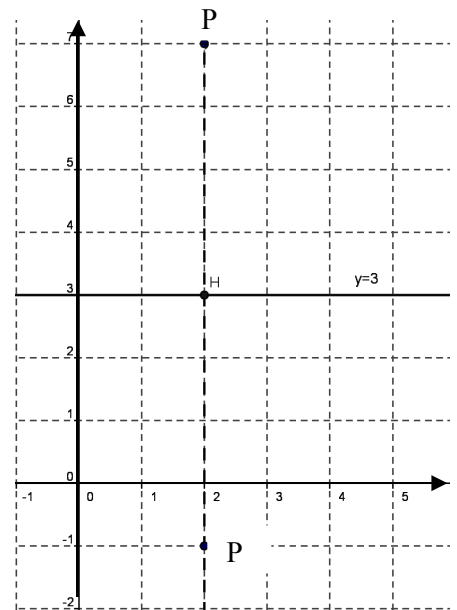
34 Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che A(0,4), B(-2,0) e l'asse y è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

35 Considerate la funzione di proporzionalità quadratica $y=2x^2$; rappresentatela nel riferimento cartesiano e segnate i suoi punti A, B, C rispettivamente di ascissa $x_A=1,\ x_B=-\frac{1}{2},\ x_C=\frac{1}{\sqrt{2}}$; trovate i corrispondenti A', B', C' nella simmetria S_y e verificate che appartengono alla funzione assegnata. Vi è un punto della curva rappresentata che risulta fisso in S_y? … … … … …
Quale delle seguenti affermazioni ritenete corretta:
[A] la curva è fissa nella simmetria considerata
[B] la curva è unita nella simmetria considerata

Simmetria rispetto ad una retta parallela agli assi cartesiani

Esempio

Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse x di equazione y=3; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{y=3}$ avente come asse tale retta. Determiniamo l'immagine di P(2,-1); da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse y=3 e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono (2,3); l'immagine di P è P'(2,y') è tale che PH≅P'H. Da questa congruenza deduciamo

$$\overline{PH}=\overline{P'H} \rightarrow |y_H-y_P|=|y_{P'}-y_H| \rightarrow 3-(-1)=y_{P'}-3 \rightarrow y_{P'}=7$$

$$\boldsymbol{S}_{y=3}: P(2,-1) \rightarrow P'(2,7)$$

36 Ripetendo il procedimento determinate l'immagine dei seguenti punti A(1,1) ; B(4,5) ; C(-1,0) e completate:

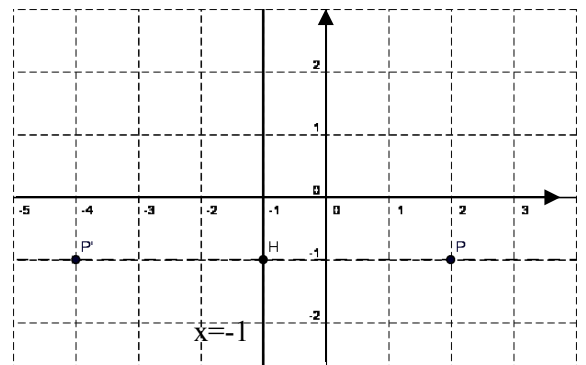
$$\boldsymbol{S}_{y=3}: \begin{cases} A(\ldots,\ldots) \rightarrow A'(\ldots,\ldots) \\ B(\ldots,\ldots) \rightarrow B'(\ldots,\ldots) \\ C(\ldots,\ldots) \rightarrow C'(\ldots,\ldots) \end{cases}$$

Generalizziamo: Vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse x di equazione y=a; sia P(x,y) un generico punto del piano e sia P'(x',y') la sua immagine in $\boldsymbol{S}_{y=a}$. Seguendo il ragionamento dell'esempio possiamo scrivere: $|y-a|=|y'-a|$ essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse si ottiene $y-a=-y'+a \rightarrow y'=-y+2a$; concludendo

$$\boldsymbol{S}_{y=a}: P(x,y) \rightarrow P'(x,-y+2a) \quad \text{o anche} \quad \boldsymbol{S}_{y=a}: \begin{cases} x'=x \\ y'=-y+2a \end{cases}$$

37 Verificate con l'applicazione di questa equazione i risultati dell'esercizio precedente.

Esempio

Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse y di equazione x=-1; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{x=-1}$ avente come asse tale retta. Determiniamo l'immagine di P(2,-1); da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse x=-1 e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono (-1,-1); l'immagine di P è P'(x',-1) tale che $PH \cong P'H$. Da questa congruenza deduciamo:

$$\overline{PH}=\overline{P'H} \rightarrow |x_P-x_H|=|x_H-x_{P'}| \rightarrow |2-(-1)|=|-1-x_{P'}| \rightarrow x_{P'}=-4 \quad \boldsymbol{S}_{x=-1}: P(2,-1) \rightarrow P'(-4,-1)$$

Ripetendo il procedimento determinate l'immagine dei seguenti punti A(1,1) ; B(-3,-2) ; C(2,0) e completate:

$$\boldsymbol{S}_{x=-1}: \begin{cases} A(\ldots,\ldots) \rightarrow A'(\ldots,\ldots) \\ B(\ldots,\ldots) \rightarrow B'(\ldots,\ldots) \\ C(\ldots,\ldots) \rightarrow C'(\ldots,\ldots) \end{cases}$$

Generalizziamo

Vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse y di equazione *x=b*; sia P(x,y) un generico punto del piano e sia P'(x',y') la sua immagine in $\boldsymbol{S}_{x=b}$. Seguendo il ragionamento dell'esempio possiamo scrivere: $|x-b|=|b-x'|$ essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse si ottiene $x-b=-x'+b \rightarrow x'=-x+2b$; concludendo

$$\boldsymbol{S}_{x=b}: P(x,y) \rightarrow P'(-x+2b,\ y) \quad \text{o anche} \quad \boldsymbol{S}_{x=b}: \begin{cases} x'=-x+2b \\ y'=y \end{cases}$$

38 I punti A(-5,1); B(-2,6); C(3,6); D(0,1) sono vertici di un quadrilatero.

1. Dimostrate che è un parallelogrammo
2. Determinate perimetro e area
3. Determinate la sua immagine A'B'C'D' in $S_{y=3}$

È vero che sia sul lato AB che sul lato CD esiste un punto fisso nella simmetria considerata? Tali punti su quali lati di A'B'C'D' si trovano? Perché?

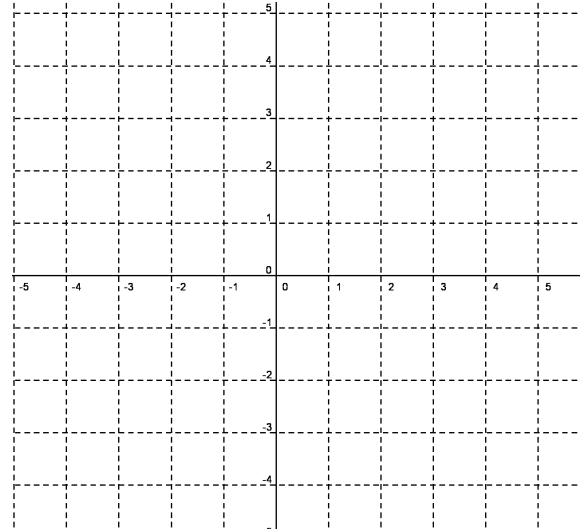
Simmetria rispetto alle bisettrici dei quadranti

39 Determinate il punto medio M del segmento avente per estremi i punti P(4,2) e P'(2,4) e verificate che il triangolo POP' è isoscele sulla base PP'.

"La retta OM è l'asse di simmetria del triangolo considerato": VERO o FALSO?

Considerate un'altra coppia di punti Q(-1,-3) e Q'(-3,-1) e ripetete le richieste precedenti.

L'asse OM è la bisettrice del I°-III° quadrante, di equazione $y=x$.

Generalizziamo: verificate che due punti $P(x_P, y_P)$ e $P'(y_P, x_P)$ sono equidistanti dall'origine del riferimento e che il punto medio del segmento PP' appartiene alla retta $y=x$.

DEFINIZIONE. La simmetria assiale avente come asse la bisettrice I°-III° quadrante, indicata con S_{b1} associa ad ogni punto $P(x_P, y_P)$ il punto $P'(y_P, x_P)$ ottenuto scambiando le coordinate di P; la sua equazione è $S_{b1}: \begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$

Tracciata nel riferimento la retta $y=-x$, dopo aver verificato che è la bisettrice del II°-IV° quadrante, possiamo dare la seguente

DEFINIZIONE. La simmetria assiale avente come asse la bisettrice II°-IV° quadrante, indicata con S_{b2} , associa ad ogni punto $P(x_P, y_P)$ il punto $P'(-y_P, -x_P)$ ottenuto scambiando l'opposto delle coordinate di P; la sua equazione è $S_{b2}: \begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases}$

40 Determinate l'immagine del quadrilatero ABCD di vertici A(0,0), B(2,2), C(5,3), D(0,5) nella simmetria S_{b1} .

41 Nella simmetria S_{b1} la retta y=-x è fissa o unita?

42 Motivate la verità della seguente proposizione:" nella simmetria S_{b2} l'immagine dell'asse x è l'asse y". Viene mantenuto l'orientamento dell' asse x?

Completate: S_{b2} : (asse x)→(asse …..) e (asse y)→(……….)

Analogamente: S_{b1} (asse x)→(…. …..) e (……..)→(……….)

43 Dato il quadrilatero ABCD di vertici A(0,0), B(3,1), C(4,4), D(1,3), trovate il suo corrispondente in S_{b1} . Quale delle seguenti affermazioni ritenete corretta:

[A] il quadrilatero è fisso nella simmetria considerata,

[B] il quadrilatero è unito nella simmetria considerata.

44 Determinate il corrispondente del parallelogrammo ABCD di vertici A(-5,1); B(-2,6); C(3,6); D(0,1) in C; perché AA',BB', CC' DD' sono paralleli? Ricordando che il parallelogrammo ha un centro di simmetria, determinate il centro di simmetria di ABCD e verificate che in S_{b1} esso ha come immagine il centro di simmetria di A'B'C'D'.

45 Nel piano cartesiano sono assegnati i punti A(0,3), B(-2,0), C(-1,-3).

1. Determinate i punti A’, B’, C’ immagine in S_{b2}
2. Calcolate l’area del quadrilatero A’B’C’O, essendo O l’origine del riferimento
3. Motivate la verità della proposizione : “i segmenti AB e A’B’ si incontrano in un punto P della bisettrice II°-IV° quadrante”
4. È vero che AP’B è congruente a PAB’?

46 Sono assegnate le simmetrie $S_1:\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}$; $S_2:\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$; $S_3:\begin{cases}x'=2-x\\y'=y\end{cases}$; $S_4:\begin{cases}x'=-x-1\\y'=3-y\end{cases}$

Usando qualche punto scelto arbitrariamente riconosci ciascuna di esse e completa la tabella sottostante:

SIMMETRIA	TIPO	CENRO: coordinate	ASSE: equazione
S_1			
S_2			
S_3			
S_4			

47 Quale tra le seguenti caratteristiche è invariante in una simmetria assiale?

[A] la posizione della figura
[B] la direzione della retta
[C] il parallelismo
[D] l’orientamento dei punti
[E] dipende dall’asse di simmetria

48 I segmenti AB e A’B’ si corrispondono nella simmetria di asse r; sapendo che ABB’A’ è un rettangolo, quale proposizione è vera?

[A] AB è perpendicolare ad r
[B] AB è parallelo ad r
[C] AB appartiene ad r
[D] AB è obliquo rispetto ad r e $AB\cap r=H$

49 È assegnato il punto $P\left(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$; determinate il suo corrispondente nelle simmetrie indicate e completate:

$S_{b2}:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$; $S_{x=-\frac{1}{2}}:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$ $S_O:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$;

$S_x:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$; $S_{y=2}:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$; $S_{C(1,1)}:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$;

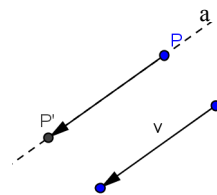
50 Un segmento unito in S_{b2} è

[A] un segmento perpendicolare alla bisettrice I°-III° quadrante
[B] un segmento perpendicolare alla bisettrice II°-IV° quadrante nel suo punto medio
[C] un segmento parallelo alla bisettrice I°-III° quadrante
[D] un segmento perpendicolare alla bisettrice II°-IV° quadrante
[E] un segmento avente il suo punto medio appartenente alla bisettrice II°-IV° quadrante

2.3 La traslazione

DEFINIZIONE. Fissato nel piano un vettore $\vec{v}$ si chiama **traslazione di vettore** $\vec{v}$ (indicata con **TR**) la corrispondenza che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' dello stesso piano in modo che $\vec{PP'} \equiv \vec{v}$

Per costruire il corrispondente di un punto P del piano procedete con i seguenti passi:

- fissate un vettore $\vec{v}$
- prendete un punto P del piano
- da P tracciate la retta a avente la stessa direzione di $\vec{v}$
- su a fissate il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'}$ sia equipollente a $\vec{v}$

P' è l'immagine di P nella traslazione TR: $P \to P'$

GLI ELEMENTI UNITI

- p: "Nella traslazione non ci sono punti uniti".
- q: "Una retta parallela al vettore che individua la traslazione è unita".

Lasciamo al lettore la verifica delle proposizioni enunciate.

TEOREMA 1

Dimostrate che TR è una isometria.

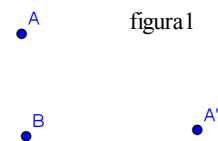
Strategia risolutiva:

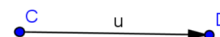
dovrete dimostrare che l'immagine di un segmento AB è il segmento A'B' tale che AB≅A'B'

TEOREMA 2

Dimostrate che se r ed r' sono due rette corrispondenti in una traslazione, allora sono parallele

figura1

51 Nel piano sono assegnati i tre punti A, B, A'; il punto A' è immagine di A in una traslazione; dopo aver determinato il vettore della traslazione costruite l'immagine del triangolo ABA'. (figura1)

52 Determinate l'immagine del parallelogrammo ABCD nella traslazione di vettore $\vec{v} \equiv \overrightarrow{AC}$.

53 Dati due punti distinti A e B e il vettore $\overrightarrow{CD}$ della figura 2, detti A' e B' i punti immagine di A e B nella traslazione di vettore $\overrightarrow{CD}$, rispondete alle questioni:

[A] di che natura è il quadrilatero ABB'A' ?

[B] può succedere che il quadrilatero in questione sia un rettangolo? E un rombo?

[C] cosa succede se AB è parallelo al vettore $\overrightarrow{CD}$?

Figura2

54 Come dobbiamo assegnare due segmenti AB e A'B' perché siano corrispondenti in una traslazione? È unica la traslazione che associa ad AB il segmento A'B'?

Descrizione analitica di una traslazione

Pensiamo il piano, dotato di riferimento cartesiano ortogonale, come formato da due cartoncini sovrapposti: sul piano D, trasparente, i punti sono rappresentati dal solito simbolo, sull'altro C, sottostante, i punti sono rappresentati con +.
Studiamo la corrispondenza TR tra i punti del piano D e i punti del piano C espressa dalla legge:

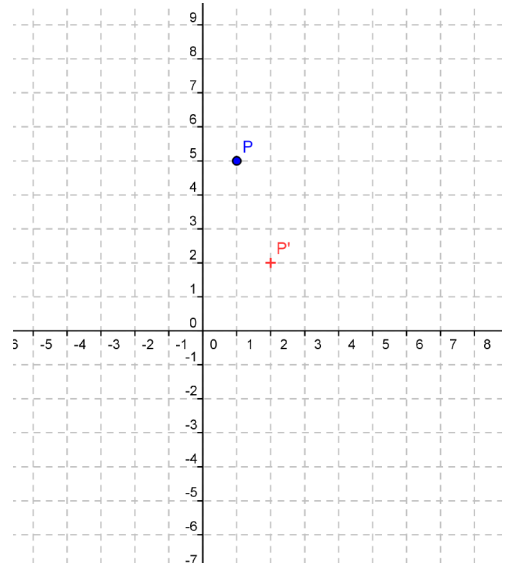
$$P(x_P; y_P) \in D \xrightarrow{TR} P'(x_p+1; y_p+(-3)) \in C$$

Se P(1;5) è il punto di D il suo corrispondente è P'(2;2)

55 Determinate il corrispondente di ciascuno dei seguenti punti $F(0;2)$; $H(-1;8)$; $K(3;3)$; $V(4;-1)$

56 Rispondete alle domande:

- è vero che il dominio della corrispondenza coincide con D?
- è vero che la corrispondenza assegnata è univoca?
- si può affermare che è biunivoca?
- di quale punto è immagine il punto S'(0;-4)?
- è vero che è una isometria?

57 Nel riferimento cartesiano rappresentate ogni punto dell'esercizio E55 e i corrispondenti F', H', K', V' e congiungete ciascuno con la propria immagine. I vettori $\vec{FF'}$, $\vec{HH'}$, $\vec{KK'}$, $\vec{VV'}$ sono equipollenti?

Dagli esercizi precedenti possiamo affermare che la corrispondenza assegnata è una isometria completamente caratterizzata dal vettore $\vec{v}(1;-3)$ pertanto è una traslazione.

DEFINIZIONE: Fissato nel riferimento cartesiano ortogonale un vettore $\vec{v}(a;b)$, chiamiamo **equazione della traslazione di vettore** $\vec{v}(a;b)$ (**TR(a,b)**) le relazioni che legano le coordinate di un punto P con le coordinate della sua immagine P'.

DEFINIZIONE: Siano x e y le coordinate del punto P e x', y' le coordinate del punto sua immagine, l' **equazione della traslazione di vettore** $\vec{v}(a;b)$ è $TR(a;b): \begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$

58 Nel riferimento cartesiano è assegnato il punto P(-4;2); determinate il punto P' immagine nella traslazione

$TR(3;-1): \begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+(-1) \end{cases}$.

Strategia risolutiva:

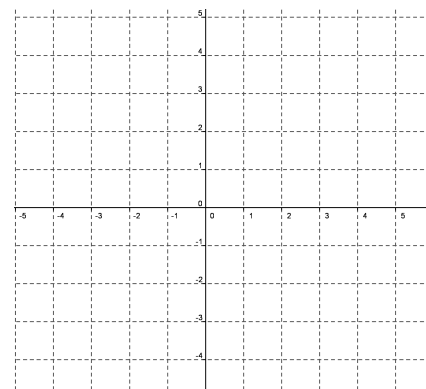
1. individuate il vettore $\vec{w}$ della traslazione: $\vec{w}(\ldots;\ldots)$
2. tracciate il vettore nel riferimento cartesiano
3. determinate le coordinate di P': P'(…;….)

Completate: $\vec{PP'}$ è … … … … a $\vec{w}$; questo significa che i due vettori hanno … … … direzione (cioè sono … … … …), stesso … … … e … … … … intensità.

59 Nello stesso riferimento dopo aver fissato un punto Q(…;…) e il punto Q'(…;…) immagine nella stessa traslazione TR(3,-1), dimostrate con le conoscenze di geometria sintetica che PP'Q'Q è un parallelogrammo.

Ipotesi: PP'≅QQ'; PP'… QQ'

Tesi: … … …

Dimostrazione:

60 Sappiamo che l' equazione di una traslazione è $TR(a;b): \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$. Assegnate le coordinate (x,y) di un punto P e (x',y') della sua immagine P', le componenti del vettore della traslazione sono date da:
[A] $a = x' + x$, $b = y' + y$ [B] $a = x - x'$, $b = y - y'$ [C] $a = x' - x$, $b = y' - y$
[D] $a = x' + x$, $b = y' - y$ [E] $a = \frac{x'}{x}$, $b = \frac{y'}{y}$

61 Dopo aver determinato l'equazione della traslazione in cui A'(0,-2) è l'immagine di A(3, 2), determinate il perimetro del triangolo AO'A' essendo O' il corrispondente di O(0,0) nella traslazione trovata.

62 Verificate che il punto medio M del segmento PQ di estremi P(-1,4) e Q(5,0) ha come immagine in TR(3,-1) il punto medio M' del segmento P'Q'.

63 Applica la traslazione di equazione $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ al segmento di estremi A(-2;4) B(3;3).

64 Dati A(1;0) e B(0,2), determina C e D in modo che ABCD sia un quadrato.

65 Determinate l'immagine del triangolo di vertici A(0,2), B(-3,2), C(0,5) nella traslazione TR(4,1); calcolatene perimetro e area.

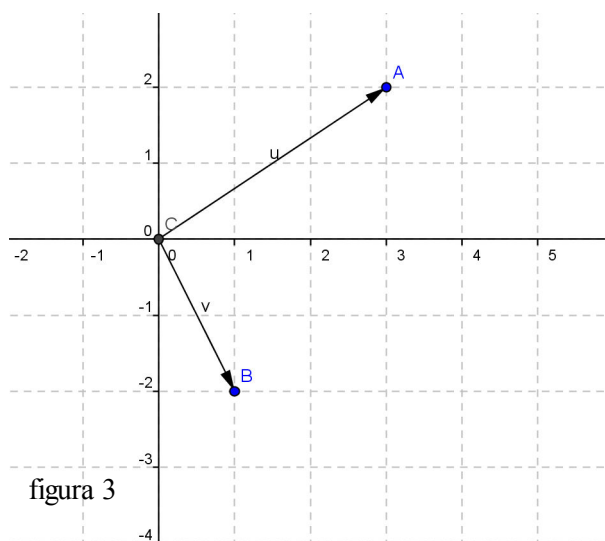
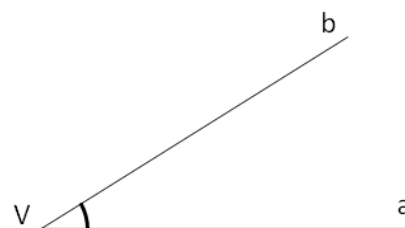
66 Determinate l'equazione della traslazione di vettore $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ assegnati dalla figura 3. Determinate inoltre l'immagine del poligono di vertici H(-1,1), K(0,-2), L(3,0), F(1,2).

67 Un vettore $\vec{v}$ ha modulo unitario, è applicato nell'origine e forma con l'asse delle ascisse un angolo di 30°. Determinate le sue componenti e scrivete l'equazione della traslazione da esso caratterizzata.

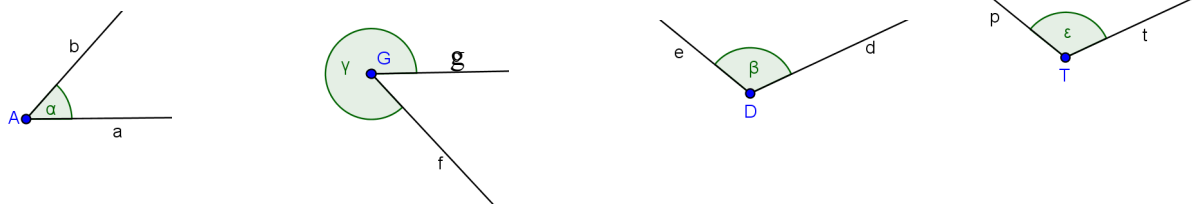
figura 3

2.4. La rotazione

Premessa:

Nel piano fissiamo un angolo **convesso** di vertice V e lati a e b; se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo muovendoci in senso antiorario; considerando l'angolo **concavo** di vertice V e lati a e b se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo concavo muovendoci in senso orario.

DEFINIZIONE: Un **angolo** si dice **orientato** quando viene fissato un ordine tra i suoi lati, esempio l'ordine alfabetico. Se per andare dal primo lato al secondo ci si muove in senso **antiorario** diciamo che l'angolo è **positivo**, al contrario avremo un angolo negativo.

Esempio

Nella figura sono disegnati alcuni angoli i cui lati seguono l'ordine alfabetico.

- Angolo di vertice A e lati a e b: a raggiunge b percorrendo l'angolo a in senso antiorario quindi diciamo che a è positivo ;
- Angolo di vertice G e lati f e g: f raggiunge g percorrendo l'angolo γ in **senso orario** quindi diciamo che **γ** è **negativo** ;

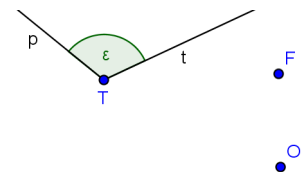
Completate:

- Angolo di vertice D e lati d ed e: ………………………………….
- Angolo di vertice T e lati p e t: ……………………………………

DEFINIZIONE. Fissato un **punto O** e un **angolo orientato α** chiamiamo **rotazione di centro O e ampiezza α** (**R**$_{O,\ \alpha}$) la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che $P'O \cong PO$ e $P\hat{O}P' = \alpha$.

Fissato l'angolo orientato α , il punto O centro della rotazione e il punto P, la sua immagine si determina con i seguenti passi:

- congiungiamo O con P
- tracciamo la circonferenza di centro O e raggio OP
- costruiamo con vertice O l'angolo $\beta \cong \alpha$
- P' è il punto di intersezione della circonferenza con il secondo lato h dell'angolo β

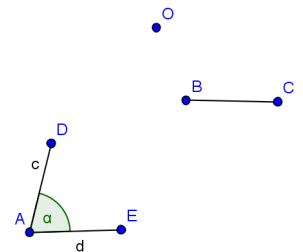
68 Prendete in considerazione l'angolo ε di vertice T, sia O il centro di rotazione e F un punto del piano di cui si vuole determinare l'immagine. Costruite F' seguendo i passi illustrati sopra.

GLI ELEMENTI UNITI

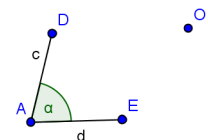
- p: nella rotazione il centro è l'unico punto unito
- q: nella rotazione sono unite tutte le circonferenze aventi il centro nel centro di rotazione

Lasciamo al lettore la verifica di quanto affermato.

TEOREMA 1. **La rotazione è una isometria.**

Servitevi della figura accanto, in cui è segnato il centro di rotazione O, l'angolo orientato α (c è il primo lato) e un segmento BC per dimostrare il teorema proposto.

Strategia risolutiva:
costruite l'immagine B'C' nella rotazione assegnata
Ipotesi … … … … … … … … … … …
Tesi … … … … … … … … … … … … … …
Dimostrazione … … … … … … … … … … … … … … …

TEOREMA 2. **La rotazione è un'isometria diretta.**

Ricordate che per questa dimostrazione basta costruire l'immagine di una figura e verificare che viene mantenuto il verso di percorrenza del contorno. Vi proponiamo il centro e l'angolo di rotazione; disegnate una figura geometrica, costruite la sua immagine e concludete.

69 Costruite l'immagine del quadrato ABCD nella rotazione di +90° avente come centro di simmetria il vertice B.
Fissate i punti medi M ed N rispettivamente di AB e di CD; dove si trovano le rispettive immagini?

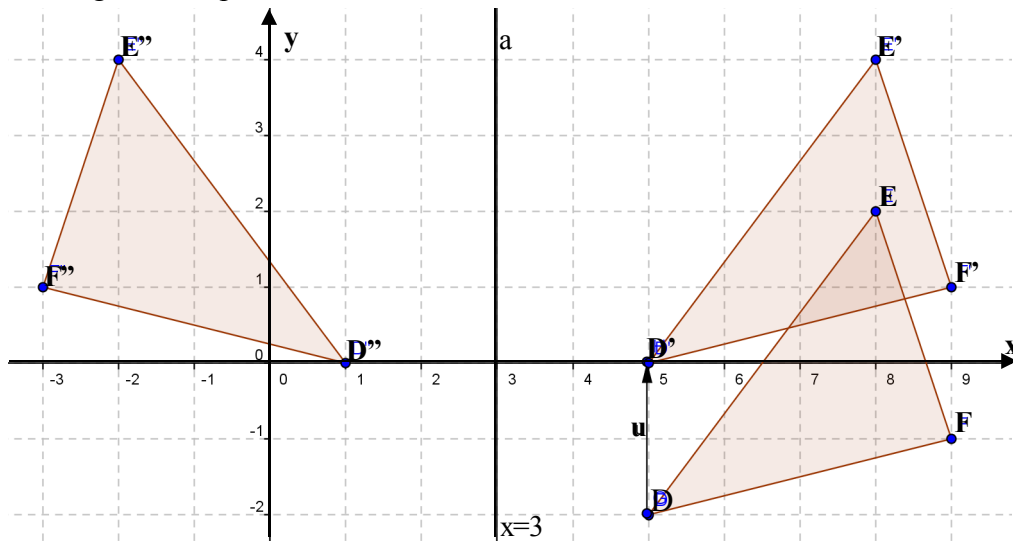
70 È vero che il quadrato è unito nella rotazione avente come centro il punto d'incontro delle diagonali e come ampiezza 90°?

71 "L'ortocentro di un triangolo equilatero è il centro di una rotazione in cui il triangolo è unito".
Determinate l'angolo di rotazione.

72 Costruite l'immagine A'B'C' del triangolo equilatero ABC nella rotazione di centro B e ampiezza $(-120°)$. Dimostrate che C, B, A' sono allineati e che ABC' è un triangolo equilatero congruente a quello dato.

►3. Composizione di isometrie

Composizione di isometrie di tipo diverso

Riferendovi alla figura, completate:

Nel riferimento cartesiano ortogonale sono assegnati il triangolo EFD avente i vertici di coordinate $E(\ldots,\ldots); F(\ldots,\ldots); D(\ldots,\ldots)$ e il vettore $\vec{u}$ di componenti $(\ldots,\ldots)$. Con la traslazione di vettore $\vec{u}$ si ha $DEF \xrightarrow{TR(\vec{u})} \ldots\ldots\ldots$ e DEF ≅ D'E'F' essendo la traslazione una isometria.

Nel piano è tracciata la retta a di equazione x=3; nella simmetria assiale S_a si ha $D'E'F' \xrightarrow{S_a} \ldots\ldots\ldots$ e D'E'F'≅ D"E"F" essendo la simmetria assiale una isometria.

Completate con le coordinate dei punti

$E(\ldots;\ldots) \xrightarrow{TR(\vec{u})} E'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_a} E''(\ldots;\ldots)$

$F(\ldots;\ldots) \xrightarrow{TR(\vec{u})} F'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_a} F''(\ldots;\ldots)$ e $EFD \xrightarrow{TR(\vec{u})} E'F'D' \xrightarrow{S_a} E''F''D''$ e $DEF \equiv D''E''F''$

$D(\ldots;\ldots) \xrightarrow{TR(\vec{u})} D'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_a} D''(\ldots;\ldots)$

per la proprietà transitiva della congruenza.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **composizione di due isometrie** Φ_1 **e** Φ_2 **l'isometria** Φ, (*e scriviamo* $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ *e leggiamo* " Φ_2 composta con Φ_1 "), che associa ad un qualunque punto P del piano il punto P" ottenuto determinando prima l'immagine P' di P in Φ_1 e di seguito l'immagine P" di P' in Φ_2. In formula: $\Phi(P) = \Phi_2 \circ \Phi_1 : P \xrightarrow{\Phi_1} P' \xrightarrow{\Phi_2} P''$.

Riprendendo l'esempio precedente concludiamo $DEF \xrightarrow{S_a \circ TR(\vec{u})} D''E''F''$.

In generale la composizione di isometrie non è commutativa: $\Phi_1 \circ \Phi_2 \neq \Phi_2 \circ \Phi_1$ **.** **(*)**

Se, utilizzando l'esempio precedente volete verificare che $S_a \circ TR(\vec{u}) \neq TR(\vec{u}) \circ S_a$, troverete un risultato che sembra contraddire quanto affermato; basta però un contro-esempio per convincerci della verità della proposizione **(*)**.

Controesempio

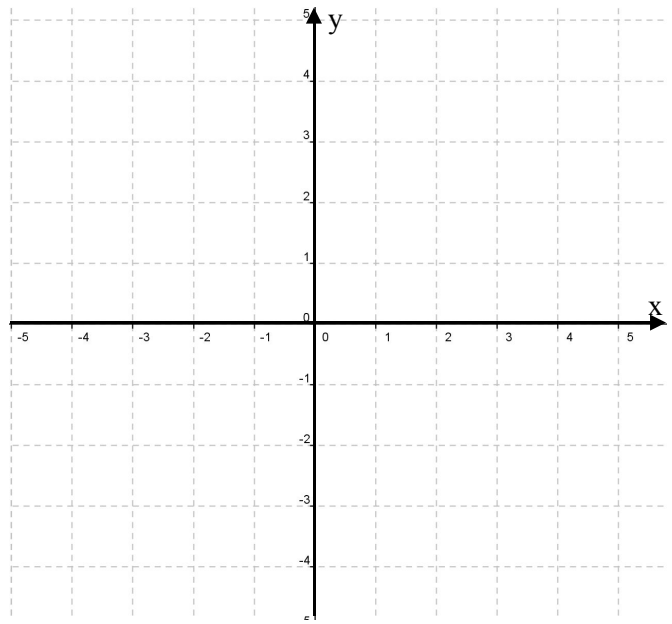
Determinate l'immagine del punto P(2,2) in $S_y \circ TR(\vec{u})$ essendo $\vec{u}(3,2)$ e poi l'immagine dello stesso punto in $TR(\vec{u}) \circ S_y$.

Tracciate il vettore $\vec{u}(3,2)$ e completate:

$P \xrightarrow{TR(\vec{u})} P'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_y} P''(\ldots;\ldots)$

$P \xrightarrow{S_y} P'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{TR(\vec{u})} P''(\ldots;\ldots)$

Concludete: la composizione di isometrie non è…………………….., infatti si ha

$S_y \circ TR(\vec{u}) \ldots\ldots TR(\vec{u}) \circ S_y$

Problema

Possiamo determinare l'equazione che lega le coordinate del punto iniziale con quelle della sua immagine nell'isometria ottenuta dalla composizione? Procediamo per passi:

I° passo: scriviamo l'equazione della traslazione $TR(\vec{u}) = \begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+2 \end{cases}$ e della simmetria rispetto all'asse y $S_y = \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

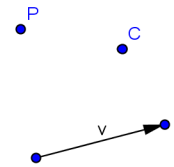
II° passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P, y_P)$ in $S_y \circ TR(\vec{u})$

$$P(x_P, y_P) \xrightarrow{TR(\vec{u})} P'(x_P+3, y_p+2) \xrightarrow{S_y} P''(-x_P-3, y_P+2) \Rightarrow S_y \circ TR(\vec{u}) \begin{cases} x'' = -x_P - 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

III° passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P, y_P)$ in $TR(\vec{u}) \circ S_y$

$$P(x_P, y_P) \xrightarrow{S_y} P'(-x_P, y_p) \xrightarrow{TR(\vec{u})} P''(-x_P+3, y_P+2) \Rightarrow TR(\vec{u}) \circ S_y \begin{cases} x'' = -x_P + 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

da quanto fatto riconfermiamo la non commutatività dell'operazione di composizione di isometrie.

73 Nel piano è assegnato il punto C e il vettore $\vec{v}$; costruite l'immagine del punto P nell'isometria $TR(\vec{v}) \circ S_C$ e anche l'immagine dello stesso punto P nell'isometria $S_C \circ TR(\vec{v})$.

74 Il centro della simmetria è il punto $C(-1,-2)$, il vettore della traslazione è $\vec{v}(3,-2)$ e il punto di cui vogliamo determinare l'immagine è scelto da voi arbitrariamente. Ripetete l'esercizio precedente e determinate l'equazione di $\Phi_1 = TR(\vec{v}) \circ S_C$ e di $\Phi_2 = S_C \circ TR(\vec{v})$

75 Sono assegnati il punto C(-4,3), la retta x=1 e il punto P(0,5); determinate l'immagine P" di P nell'isometria $\Delta = S_C \circ S_{x=1}$ e l'immagine P* di P nell'isometria $\Delta^* = S_{x=1} \circ S_C$. È vero che p" e P* si corrispondono nella simmetria S_y ? Determinate l'area del triangolo PP"P*. (R. area=$40u^2$)

76 È assegnato un punto O; determinate l'immagine P' di un punto P nella rotazione di centro O e angolo di 60° e l'immagine P" di P' nella simmetria avente come asse la retta PO.

1. Completate: $P \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots} P''$
2. Dimostrate che P, P', P" appartengono alla circonferenza di centro O e raggio OP
3. Individuate le caratteristiche del quadrilatero PP"OP'
4. Determinatene l'area, supponendo $\overline{OP} = 2(m)$ (R. $area = 2\sqrt{3}(m^2)$)

Composizione di isometrie dello stesso tipo

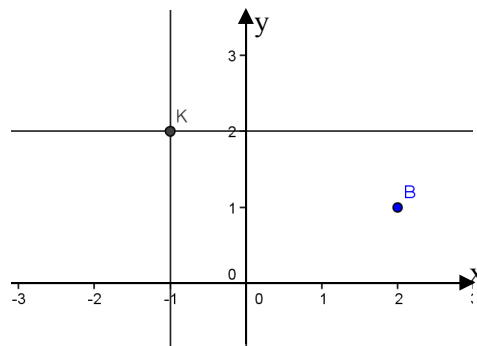
77 Determinate l'equazione dell'isometria che si ottiene componendo la simmetria che ha per asse l'asse x e la simmetria avente come asse l'asse y: $S_y \circ S_x \begin{cases} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$ Quale isometria avete ottenuto?

Determinate l'equazione di $S_x \circ S_y \begin{cases} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$ Cosa potete concludere?

78 Nel riferimento cartesiano ortogonale sono tracciate le rette $a: x=-1$ e $b: y=2$ e il punto $B(2,1)$.

1] Determinate l'immagine di B nell'isometria $\Omega = S_a \circ S_b$ di cui indicherete l'equazione.

2] Determinate l'immagine di B nell'isometria $\Omega_1 = S_b \circ S_a$ di cui indicherete l'equazione.

3] Indicate le coordinate del punto K e scrivete l'equazione della simmetria di centro K. Cosa concludete?

Generalizziamo

Le rette a e b sono perpendicolari e O è il loro punto di intersezione. Dimostrate che:

1. La composizione delle due simmetrie di assi a e b è commutativa
2. L'isometria $\Omega = S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$ è la simmetria centrale di centro O

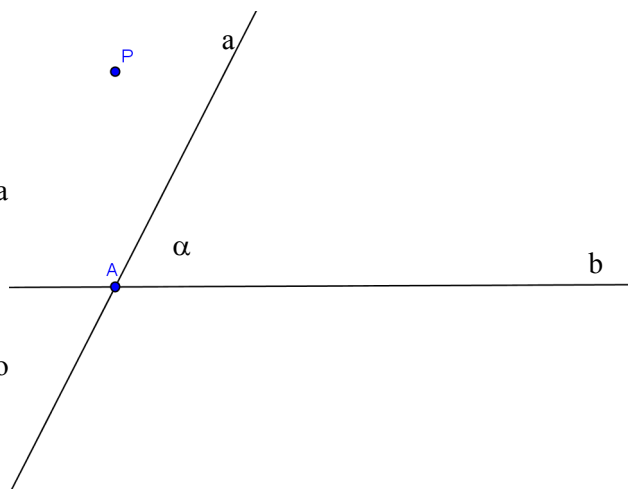
Conclusione: La composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari in O è la simmetria centrale di centro O. L'operazione è commutativa.

79 Determinate l'immagine del punto P nell'isometria ottenuta componendo due simmetrie con assi incidenti. Servitevi della figura accanto. $P \xrightarrow{S_a} P' \xrightarrow{S_b} P''$

Verificate che la composizione non è commutativa determinando $P \xrightarrow{S_b} P'_1 \xrightarrow{S_a} P''_1$

Dimostrate che $PA \equiv P'A \equiv P''A \equiv P'_1 A \equiv P''_1 A$

Dimostrate che i punti $P,\ P',\ P'',\ P'_1,\ P''_1$ stanno sulla circonferenza di centro A.

Dimostrate che $P\hat{A}P'' = 2 \cdot \hat{\alpha}$

Conclusione: La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti nel punto A è la rotazione di centro A e angolo orientato $\mathbf{2 \cdot \hat{\alpha}}$; punti corrispondenti appartengono alla circonferenza di centro A e raggio PA. La composizione in esame non è commutativa.

80 ABC è un triangolo equilatero e O è il centro della circonferenza circoscritta. Dimostrate che il triangolo è unito nella rotazione di centro O e angolo α=120°. Analogamente il quadrato ABCD è unito nella rotazione di centro H, punto d'incontro delle sue diagonali, di angolo α=90°.

81 Giustificate la verità della proposizione: "La simmetria centrale di centro K è una rotazione di 180°".

82 Nel piano dotato di riferimento cartesiano è tracciata la bisettrice I°-III° quadrante e la retta $y=1$. Completate le osservazioni seguenti:

- il punto di intersezione K ha coordinate K(…,…)
- l'angolo delle due rette è di …..°

83 Scrivete l'equazione della simmetria avente come asse la bisettrice: $S_{b1}\begin{cases}x'=\dots\dots\\y'=\dots\dots\end{cases}$ e l'equazione della simmetria di asse la retta $y=1$: $S_{y=1}\begin{cases}x'=\dots\dots\\y'=\dots\dots\end{cases}$.

84 Determinate le coordinate del punto P" immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega=S_{b1}\circ S_{y=1}$ e scrivete l'equazione di Ω.
Concludete: Ω è la rotazione di centro ……. e angolo ……(ricordate il segno all'angolo di rotazione)

85 Determinate le coordinate del punto P* immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega^*=S_{y=1}\circ S_{b1}$ e scrivete l'equazione di Ω*.
Concludete: Ω* è la rotazione di centro ……. e angolo ……(ricordate il segno all'angolo di rotazione)

86 Determinate l'equazione della isometria $J=S_{b1}\circ S_{x=4}$ e stabilite se esiste qualche elemento unito. Come cambia l'equazione dell'isometria $J^*=S_{x=4}\circ S_{b1}$ rispetto alla precedente? Sia J che J* sono rotazioni: determinate centro e angolo (con segno) di ciascuna. A questo scopo potete utilizzare il punto P(2,4) o un punto arbitrariamente scelto.

87 Determinate l'immagine del punto A nell'isometria $\Delta=S_b\circ S_a$ essendo a e b le rette parallele segnate in figura e A il punto dato. Dimostrate che $\overline{AA''}=2\cdot d$ essendo d la distanza tra le rette a e b.
Fissate arbitrariamente un altro punto B non appartenente ad alcuna delle rette date e determinate la sua immagine B" nell'isometria Δ.
È vero che $\overline{AA''}=\overline{BB''}$ e $\overline{AA''}//\overline{BB''}$? Potete concludere che l'isometria Δ è la traslazione di vettore $\overrightarrow{AA''}$?

A

a

b

DEFINIZIONE. La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una **traslazione di vettore** avente direzione perpendicolare ai due assi di simmetria e modulo uguale al doppio della distanza tra gli stessi assi.

88 Verificate che la traslazione $\Delta_1=S_b\circ S_a$ è caratterizzata da un vettore avente modulo e direzione uguali al vettore $\overrightarrow{AA''}$ trovato nell'esercizio precedente, ma verso opposto.

89 Nel riferimento cartesiano ortogonale sono assegnati i punti A(1,5); B(2,1); C(-1,3). Determinate i punti A", B", C" immagine rispettivamente di A, B, C nella traslazione $TR=S_{x=-2}\circ S_{x=1}$. Scrivete l'equazione della traslazione, individuate il vettore che la definisce calcolandone modulo e direzione.

90 Determinate i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ delle traslazioni $TR(\vec{u})\begin{cases}x'=x+1\\y'=y-2\end{cases}$ e $TR(\vec{v})\begin{cases}x'=x-3\\y'=y-1\end{cases}$ e il vettore $\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}$. Verificate che $TR(\vec{v})\circ TR(\vec{u})=TR(\vec{s})$.
Cosa otteniamo dalla composizione $TR(\vec{u})\circ TR(\vec{v})$? Sapresti darne la motivazione?
Concludete: componendo due traslazioni si ottiene ……………………………………….

91 Nel riferimento cartesiano ortogonale Oxy è assegnato il punto $O_1(2,1)$; scrivete l'equazione della simmetria centrale di centro O $S_O=\begin{cases}x'=\dots\dots\\y'=\dots\dots\end{cases}$ e l'equazione della simmetria centrale di centro O_1 $S_{O_1}=\begin{cases}x'=\dots\dots\\y'=\dots\dots\end{cases}$. Determinate l'immagine P" del punto $P(1,2)$ nell'isometria $\Sigma=S_O\circ S_{O_1}$ di cui avrete scritto l'equazione e determinate $\overline{PP''}$. Determinate Q" immagine di $Q\left(\frac{1}{2},-1\right)$ nell'isometria Σ e determinate $\overline{QQ''}$. Potete affermare che $\overrightarrow{PP''}\equiv\overrightarrow{QQ''}$? Verificate che $\overrightarrow{PP''}\equiv\overrightarrow{QQ''}\equiv2\cdot\overrightarrow{O_1O}$.

92 È vero che $\Sigma=S_O\circ S_{O_1}$ e $\Sigma_1=S_{O_1}\circ S_O$ sono la stessa isometria?

93 Dimostrate che la composizione di due simmetrie centrali è una traslazione caratterizzata dal vettore parallelo alla retta passante per i due centri e modulo uguale al doppio della loro distanza.

DEFINIZIONE. La composizione di due simmetrie centrali è una **traslazione di vettore** avente la direzione della retta OO_1 e modulo uguale al doppio della distanza tra O e O_1 .

94 Composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli.

Prima simmetria $\begin{cases} x' = 2b - x \\ y' = y \end{cases}$; Seconda simmetria $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$

Componendo le due simmetrie si ha $\begin{cases} x' = 2b - 2a + x \\ y' = y \end{cases}$ che è … … … … … … … … …

Se a=b le due simmetrie sono … … … … … … … … … … la loro composizione è … … … … … …

95 Composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari.

Una simmetria con asse parallelo all’asse y ha equazione $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$ e asse x = a

Mentre una simmetria con asse parallelo all’asse x ha equazione $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ e asse y = b

Componendo le due simmetrie otteniamo … …

Isometria inversa

Sappiamo che dalla composizione di due isometrie si ottiene una isometria e in generale componendo due trasformazioni geometriche si ottiene una trasformazione geometrica, ossia una corrispondenza biunivoca tra punti del piano.
Considerate due trasformazioni Ψ_1 e Ψ_2 e detta I l’identità può succedere che $\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1 = I$ cioè che l’immagine di un generico punto P nella trasformazione composta coincida con P stesso.

DEFINIZIONE. Si chiama **inversa di una trasformazione** $\boldsymbol{\Psi}$ la trasformazione che composta con $\boldsymbol{\Psi}$, a destra o a sinistra, dà origine all’identità e la indicheremo con $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$; in simboli: $\boldsymbol{\Psi} \circ \boldsymbol{\Psi}^{-1} = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{I}$

Per quanto riguarda le isometrie studiate

96 Verificate che:

1. l’inversa della traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$ è la traslazione di vettore $-\vec{v}$;
2. l’inversa di una rotazione di centro O e angolo α è la rotazione di centro O e angolo -α

97 Verificate che le simmetrie (centrale, assiale) hanno se stesse come isometria inversa, ossia $(S_K)^{-1} = S_K$ e $(S_r)^{-1} = S_r$

DEFINIZIONE. Si chiama **involutoria** una trasformazione che coincide con la sua inversa.

98 La proposizione “la simmetria centrale è la composizione di due simmetrie assiali” è:

[A] sempre vera [B] vera se i due assi sono incidenti [C] mai vera
[D] vera se i due assi sono perpendicolari [E] vera se i due assi sono paralleli

99 Completa la proposizione: “La simmetria centrale di centro $C\left(-\frac{5}{3}, \sqrt{3}\right)$ può essere ottenuta come composizione delle due simmetrie assiali di assi le rette … … … … … … e la sua equazione è … … … … … … … … … … … … … … …

100 Stabilite il valore di verità delle proposizioni:

Componendo due isometrie si ottiene una isometria

a) Componendo due simmetrie assiali si ottiene una simmetria assiale V F
b) Componendo due traslazioni si ottiene una traslazione V F
c) Componendo due simmetrie centrali si ottiene una simmetria centrale V F
d) Componendo due simmetrie assiali di assi incidenti si ottiene una rotazione V F
e) Componendo due rotazioni si ottiene una rotazione V F
f) L'identità si ottiene componendo una isometria con sé stessa V F
g) L'inversa di una traslazione è la stessa traslazione V F
h) Componendo una simmetria centrale con una rotazione si ottiene l'identità V F
i) Componendo una simmetria centrale di centro H con la simmetria assiale avente come asse una retta passante per H si ottiene sempre l'identità V F

Ulteriori esercizi sulle isometrie

101 L'equazione $\begin{cases} x'=4-x \\ y'=y \end{cases}$ descrive:

[A] la simmetria di asse l'asse y
[B] la simmetria di asse la retta $x=4$
[C] la traslazione di vettore $\vec{v}(4,0)$
[D] la simmetria di asse x=2
[E] la simmetria di centro C(4,0)

102 La trasformazione $\Sigma \begin{cases} x'=-y+2 \\ y'=2x \end{cases}$ è un'isometria?

103 Il segmento di estremi A(3,4) e B(3,-2) ha come simmetrico il segmento di estremi A'(3,2) e B'(5,2); è stata eseguita:

[A] la simmetria di asse la retta $x=4$
[B] la simmetria S_{b2}
[C] la simmetria S_{b1}
[D] la simmetria di asse la retta $x=3$
[E] la simmetria $S_{y=3}$

104 Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) In una isometria vi è almeno un elemento unito
b) Nella simmetria centrale vi sono infinite rette unite, ma solamente un punto unito
c) In ogni triangolo vi è almeno un asse di simmetria
d) Qualche quadrilatero ha un centro di simmetria
e) Il triangolo equilatero ha un centro di simmetria
f) Il rombo è l'unico quadrilatero avente due assi di simmetria
g) Tutte le rette aventi la stessa direzione del vettore della traslazione sono rette unite
h) Solo la simmetria assiale è una isometria invertente
i) Rette parallele hanno come immagine in una isometria rette parallele
j) In una isometria una retta è sempre parallela alla sua immagine

105 Il quadrilatero di vertici A(5,0), B(9,0), C(12,4), D(7,3) nella simmetria S_x ha fisso il lato AB. Spiegate come sia possibile questo fatto.

106 Dimostrate che la bisettrice di un angolo è il suo asse di simmetria

107 Il rettangolo ABCD con AB<BC ha come immagine il rettangolo A'B'C'D' nella simmetria avente come asse la retta AC. Potete affermare che AB'DCD'B è un esagono regolare?

108 I due segmenti della figura1 possono essere corrispondenti in una simmetria centrale?

figura1

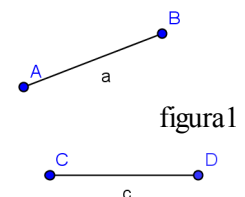
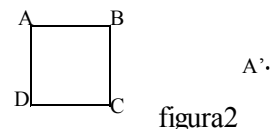
C D
c

109 Nella figura abbiamo disegnato il quadrato ABCD e il punto A' corrispondente di A in una isometria. Stabilite quale isometria è completamente fissata con questi elementi (simmetria assiale, traslazione, simmetria centrale) e determinate in essa l'immagine del quadrato.

figura2

110 Costruite l'immagine di un triangolo rettangolo ABC (non isoscele) di ipotenusa BC

a) in ciascuna delle simmetrie $S_A;\ S_B;\ S_C$
b) nella simmetria S_M essendo M il punto medio dell'ipotenusa
c) in ciascuna delle simmetrie aventi come assi le rette dei lati

111 Comporre due traslazioni di vettori $v_1(2;\ 3)$ e $v_2(3;\ 6)$ applicandole al triangolo ABC, con A(-2; -1) B(-1; -2) C(-4; -3) .

112 Determina il corrispondente A'B' del segmento di vertici A(-2; 6) e B(-3; 3) nella simmetria di asse x=-1, applica poi al segmento ottenuto un'ulteriore simmetria con asse x=4. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi paralleli tra di loro trova le nuove coordinate dei due punti A e B.

113 Determina il corrispondente A'B' del segmento di vertici A(1; -6) e B(4; 3) nella simmetria di asse x = 2, applica poi al segmento ottenuto un ulteriore simmetria con asse y = 1. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi perpendicolari tra di loro determina le nuove coordinate dei due punti A e B.

114 Componi le seguenti trasformazioni geometriche scrivendo l'equazione della trasformazione composta e fornendo un esempio con disegno relativo.

a) Due rotazioni con lo stesso centro
b) Due rotazioni con centro diverso
c) Due simmetrie centrali
d) Due rotazioni di un angolo retto

115 Sono assegnate le simmetrie assiali

$$S_1:\begin{cases} x'=x \\ y'=2-y \end{cases} \quad S_2:\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \quad S_3:\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases} \quad S_4:\begin{cases} x'=-x-6 \\ y'=y \end{cases}$$

a) Individuate l'asse di simemtria di ciascuna, rappresentate nel riferimento cartesiano ortogonale i rispettivi assi indicandoli con s1, s2, s3, s4; completate e riproducete nello stesso riferimento

$$P\left(-3;\frac{1}{2}\right)\overset{S_1}{---->}P_1(\dots,\dots);\ P\left(-3;\frac{1}{2}\right)\overset{S_2}{---->}P_2(\dots,\dots)$$

$$P\left(-3;\frac{1}{2}\right)\overset{S_3}{---->}P_1(\dots,\dots);\ P\left(-3;\frac{1}{2}\right)\overset{S_4}{---->}P_2(\dots,\dots)$$

b) Siano A, B, C, D i punti $A=s_4\cap s_3;\ B=s_4\cap s_1;\ C=s_1\cap s_3;\ D=s_2\cap s_1$; dimostrate che i triangoli ABC e CDE sono rettangoli isosceli e che i lati dell'uno sono il quadruplo dei lati dell'altro.

c) Determinate il rapporto tra i loro perimetri e tra le loro aree.